УДК 330.42
ББК 65.01
Ф 114

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Рецензенты: д-р экон. наук С.А. Дзюба;
д-р физ.-мат. наук А.В. Савватеев

Ф 114 **Филатов А.Ю.** Математическая экономика в задачах: учебн. пособие / Филатов А.Ю. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та. – 2013. – 123 с.

Охватывает основные разделы экономики и может быть использовано в качестве дополнительного пособия по широкому спектру экономических курсов. В частности, содержит задачи по теории спроса и предложения, моделям потребительского поведения, экономике фирмы, организации отраслевых рынков, макроэкономике, финансам. Все задачи сопровождаются подробными решениями. Более сложные задачи отмечены звездочкой, наиболее трудные и требующие специальной подготовки – двумя звездочками.

Предназначено для преподавателей микро- и макроэкономики, теории отраслевых рынков, финансового анализа и других экономико-математических дисциплин, а также бакалавров, магистров и аспирантов, изучающих экономику.

Александр Юрьевич Филатов
e-mail: alexander.filatov@gmail.com
skype: alexander.filatov_
http://vk.com/alexander.filatov

**Другие авторские разработки
в области математической экономики
выложены на сайтах:**
http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_ec.htm
http://math.isu.ru/filatov
http://vk.com/baikalreadings
http://youtube.com/sibscience

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРА

Несмотря на серьезные изменения, происходящие в современном мире, экономика, по мнению многих ученых, до сих пор является наиболее продвинутой из социальных наук, как в плане прогнозирования последствий тех или иных принимаемых в обществе решений, так и в плане создания эффективных механизмов управления социумом. В значительной степени это связано с мощным математическим инструментарием (включающим, в частности, теорию игр и эконометрику), на котором основывается экономика. Более того, можно сказать, что современная экономика по большому счету занимается систематизацией представлений об экономическом мире в виде разумно построенных и поддающихся анализу математических моделей. Из этого следует, что и изучение экономики полезно осуществлять с применением моделей, описывающих поведение рациональных экономических агентов, и задач, с помощью которых, как показывает практика, порой удается достичь более прочных знаний, чем из чисто теоретических курсов.

Данное учебное пособие охватывает основные темы экономики и может быть использовано в качестве дополнительного пособия по широкому спектру экономических курсов. Весь материал разбит на следующие разделы: «Теория спроса и предложения», «Эластичность и ее виды», «Теория потребительского поведения», «Теория фирмы», «Теория отраслевых рынков», «Макроэкономика», «Финансы», «Другие задачи». По каждому из них в пособие включены простейшие задачи, доступные не только студентам, но и школьникам, более сложные, отмеченные звездочкой, а также наиболее трудные и требующие специальной подготовки, отмеченные двумя звездочками. Задачи сопровождаются подробными решениями. Следовательно, пособие можно использовать и как задачник, и как решебник, позволяющий проверить правильность собственных выкладок, а также самостоятельно разобраться в теме посредством разбора верных решений.

Все задачи, включенные в представленное учебное пособие, были составлены и предложены автором на школьных и студенческих олимпиадах по математической экономике разного уровня в 2001–2012 г.г. Они активно используются при преподавании различных экономических дисциплин в ИМЭИ ИГУ, а также более чем в двух десятках ведущих экономических университетов России и стран СНГ, включая РЭШ, НИУ ВШЭ, НГУ, ДВФУ, СФУ, УрФУ и др.

1. ТЕОРИЯ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Задача 1.1

Фирма понизила цену на свою продукцию на 20 %. На сколько процентов фирма должна повысить цену, чтобы она стала первоначальной. Объяснить.

Решение:

Пускай начальная цена составляла p. После снижения она стала равна $0{,}8p$. По условию, $0{,}8p\,x = p$. Отсюда повышение цены составит $x = p/0{,}8p = 1{,}25$ раза или **25 %**.

Задача 1.2

Не удовлетворившись ростом продаж, корпорация «Намбо» увеличила скидку с 25 % до 40 %. На сколько процентов подешевел распродаваемый товар?

Решение:

Пусть начальная цена товара составляла p. После увеличения скидки цена уменьшилась с $0{,}75p$ до $0{,}6p$. Поскольку $0{,}6p/0{,}75p = 0{,}8$, то **распродаваемый товар подешевел на 20 %**.

Задача 1.3

Фирма повысила цены на велосипеды на 20 %, в результате объем продаж сократился на 10 %. Как изменилась выручка?

Решение:

Пускай начальная цена составляла p, а объем продаж q. Выручка в этой ситуации была равна pq. После повышения цена стала равна $1{,}2p$, а объем продаж $0{,}9q$. Новая выручка составила $1{,}2p \cdot 0{,}9q = 1{,}08pq$, что **на 8 % больше, чем раньше.**

Задача 1.4

В микрорайоне есть 2 супермаркета: «Мир ниже нуля» и «+20». Первый с целью увеличения объема продаж снижает цену на 20 %. Второй – каждому покупателю дает дополнительно 20 % продукции бесплатно. Есть ли разница, где делать покупки, если изначально цены были одинаковы? Ответ поясните.

Решение:

В супермаркете «Мир ниже нуля» на первоначальную сумму TR по сниженной на 20 % цене $0{,}8p$ можно купить объем товара $q = TR/0{,}8p = 1{,}25TR/p$, т.е. на 25 % больше, чем раньше. Супермаркет же «+20» дает бесплатно только 20 % продукции. В **«Мире ниже нуля»** делать покупки выгоднее.

Задача 1.5 (15 баллов)

Фирма понизила цены на 20 %, при этом объем продаж увеличился на 50 %? Как изменилась выручка? Как изменилась прибыль, если издержки пропорциональны объему производства, и в первоначальной ситуации составляли половину от выручки? Целесообразно ли осуществленное снижение цены?

Решение:

Пусть в первоначальной ситуации цена была равна p, объем продаж q, выручка $TR_1 = pq$, издержки $TC_1 = TR_1/2 = 0,5pq$ и прибыль $\pi_1 = TR_1 - TC_1 = 0,5pq$. После понижения на 20 % цена составила $0,8p$. Объем продаж после повышения на 50 % составил $1,5q$. Новая выручка стала равна

$$TR_2 = p_2 q_2 = 0,8p \cdot 1,5q = 1,2pq,$$

что означает **рост на 20 %**. Издержки изменились пропорционально объему производства, т.е. выросли в 1,5 раза, составив

$$TC_2 = 1,5 \cdot TC_1 = 1,5 \cdot 0,5pq = 0,75pq.$$

Прибыль оказалась равной

$$\pi_2 = TR_2 - TC_2 = 1,2pq - 0,75pq = 0,45pq.$$

Таким образом, $\pi_2/\pi_1 = 0,45pq/0,5pq = 0,9$, т.е. **прибыль упала на 10 %**. Следовательно, снижение цены оказалось **нецелесообразно**.

Задача 1.6*

Торговая сеть «Атлантида» устраивает акцию: приобретая в определенные сроки любой товар, покупатель получает купоны на сумму 30 % от его стоимости. Этими купонами можно в следующем периоде оплатить до 20 % суммы следующих покупок. Каков реальный размер скидки?

Решение:

Приобретая товар на сумму x, покупатель получает купоны на сумму $0,3x$. Купонами можно оплатить одну пятую часть новых покупок, т.е. их максимальная стоимость составит $5 \cdot 0,3x = 1,5x$. Таким образом, при покупке товаров на сумму $x + 1,5x = 2,5x$ покупатель экономит $0,3x$. Размер скидки равен $0,3x/2,5x = 0,12$ = **12 %**.

Задача 1.7

Компания установила цену платья в размере 2500 руб. и смогла продать половину произведенной продукции. Еще 20 % платьев продались с 20-процентной скидкой, а остатки ушли на 60-процентной распродаже. Выгодной ли оказалась такая ценовая политика по сравнению с продажей всех платьев по 2000 руб.?

Решение:

Компания продала 50 % платьев по 2500 руб., 20 % платьев по $0,8 \cdot 2500 = 2000$ руб. и $(100-50-20)\% = 30\%$ платьев по $0,4 \cdot 2500 = 1000$ руб. Таким образом, средняя продажная цена платья составила $0,5 \cdot 2500 + 0,2 \cdot 2000 + 0,3 \cdot 1000$ = **1950 руб.** Следовательно, завышать цену оказалось для компании **невыгодно**.

Задача 1.8

Выручка индивидуального предпринимателя по итогам года составила 8 млн руб., а его издержки 5 млн руб. Какой вариант упрощенной системы налогообложения – 6 % с выручки или 15 % с прибыли – выгоднее использовать предпринимателю?

Решение:
Прибыль предпринимателя равняется 8 – 5 = 3 млн руб. 6 % с выручки составят 0,06·8 = 0,48 млн руб., а 15 % с прибыли – 0,15·3 = 0,45 млн руб. **Вариант 15 % с прибыли выгоднее.**

Задача 1.9*

Лиса Алиса и Кот Базилио принимали вклады от богатеньких Буратин для последующего инвестирования их на Поле Чудес. При этом их прибыль составляла 99 % от выручки. После постановления правительства о борьбе со злоупотреблениями в финансовой сфере при неизменных затратах прибыль аферистов сократилась до 90 % от выручки. Насколько уменьшился объем злоупотреблений? Можно ли считать проведенную борьбу эффективной?

Решение:
Известно, что изначально прибыль аферистов составляла 99 % от выручки. Следовательно, издержки были равны всего одному проценту: $TC = 0{,}01\,TR_1$.
В новой ситуации прибыль составляет уже только 90 % от выручки, а издержки (прежние!) равны 10 %: $TC = 0{,}01\,TR_1 = 0{,}1\,TR_2$. Из данного соотношения видим, что $TR_2 = 0{,}1\,TR_1$. То есть злоупотребления **сократились в 10 раз**. Борьба **оказалась эффективной**.

Задача 1.10

Заполните пропущенные ячейки в таблице. Ответ поясните.

Цена	Спрос	Предлож.	Дефицит	Избыток	Объем продаж	Выручка
40			80			800
	80				30	1800
		50	5			5000
120				30	40	

Решение:
Используем формулы:
1) дефицит = спрос – предложение, если спрос > предложения;
2) избыток = предложение – спрос, если предложение > спроса;
3) объем продаж = min{спрос, предложение};
4) выручка = цена·объем продаж.

Ответ.

Цена	Спрос	Предлож.	Дефицит	Избыток	Объем продаж	Выручка
40	100	20	**80**	–	20	**800**
60	**80**	30	50	–	**30**	**1800**
100	55	**50**	**5**	–	50	**5000**
120	40	70	–	**30**	**40**	4800

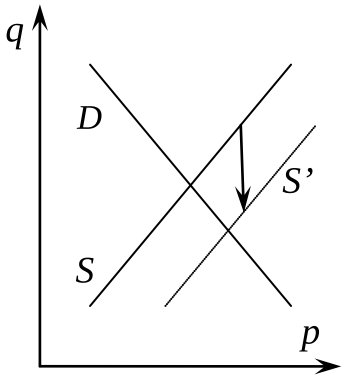
Задача 1.11

Проанализируйте влияние описанных ниже событий на рынок автомобилей. Укажите, как изменится равновесная цена и объем продаж. Проиллюстрируйте произошедшие изменения с помощью графиков.

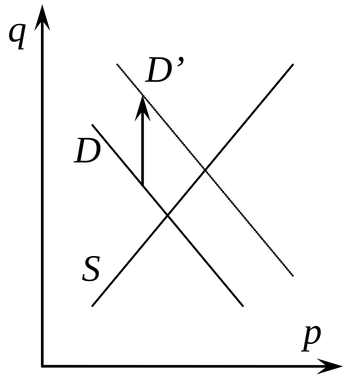
1. Государство увеличило таможенные пошлины.
2. Выросли доходы населения.
3. Резко повысилась цена на бензин.

Решение:

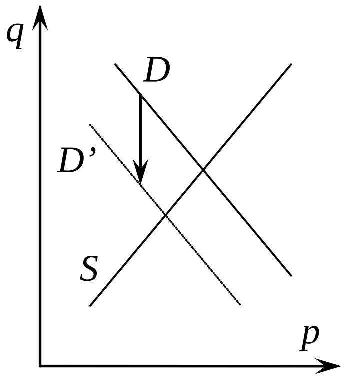
1. Увеличение таможенных пошлин сокращает предложение (по старой цене производители не в состоянии поставлять прежнее количество автомобилей). **Цена на рынке увеличивается, объем продаж сокращается.**
2. Увеличение доходов стимулирует увеличение спроса на автомобили. **Цена и объем продаж увеличиваются.**
3. Поскольку бензин и автомобили являются дополняющими товарами, то подорожание бензина приведет к сокращению спроса на автомобили. **Цена и объем продаж сокращаются.**



1



2



3

Задача 1.12

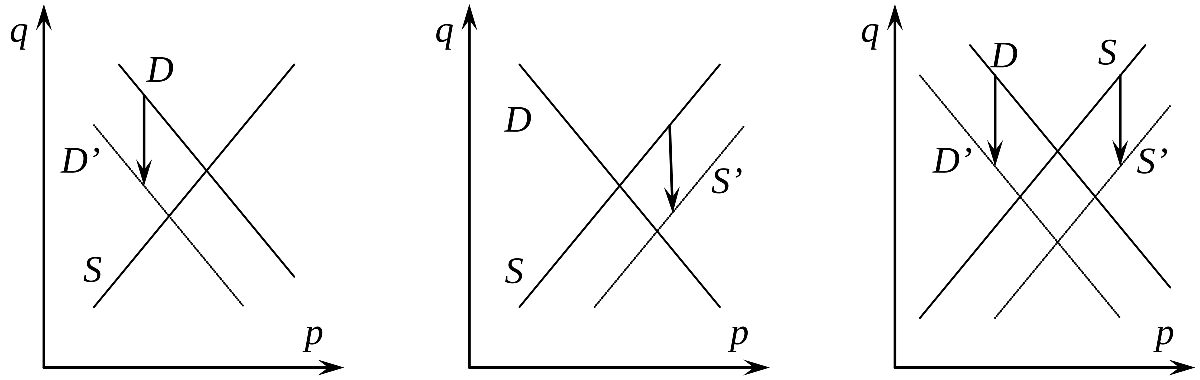
Проанализируйте влияние описанных ниже событий на рынок компьютеров. Укажите, как изменится равновесная цена и объем продаж. Проиллюстрируйте произошедшие изменения с помощью графиков.

1. В результате экономического кризиса сократились доходы населения;
2. Разорилась часть фирм, занимающихся продажей компьютеров;
3. Оба вышеперечисленных события произошли одновременно.

Решение:

1. Поскольку компьютеры принадлежат к числу нормальных товаров, сокращение доходов приводит к уменьшению спроса. **Уменьшаются цена и объем продаж.**
2. Разорение части фирм приводит к сокращению предложения. **Уменьшается объем продаж, цена при этом увеличивается.**

3. Одновременное сокращение спроса (из-за падения доходов) и предложения (из-за разорения фирм) приводит к существенному **уменьшению объема продаж**, **цена при этом может незначительно вырасти или упасть**, однако утверждать что-то однозначно здесь нельзя.



1 2 3

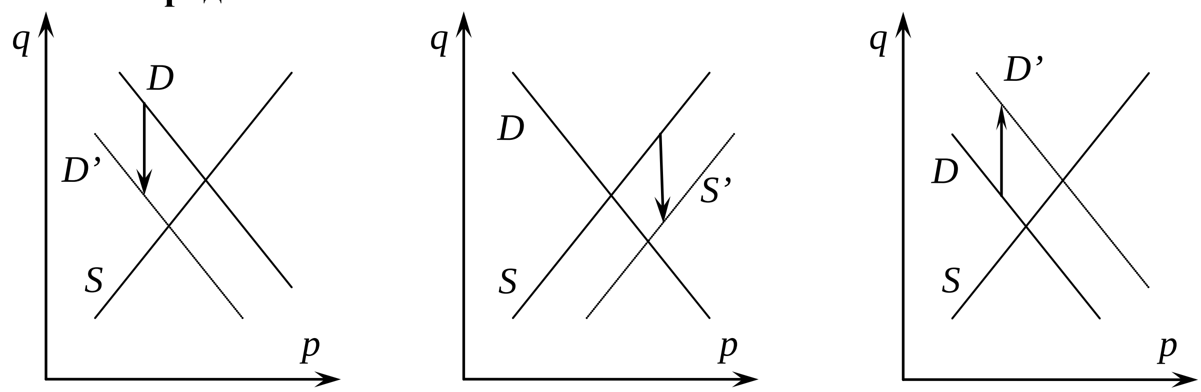
Задача 1.13

Проанализируйте влияние описанных ниже событий на рынок низкокачественных синих трахтакумб. Укажите, как изменится равновесная цена и объем продаж. Проиллюстрируйте произошедшие изменения с помощью графиков.

1. Конкурент, продающий высококачественные красные трахтакумбы, провел активную рекламную кампанию.
2. Государство повысило налог на прибыль.
3. Началась вторая волна экономического кризиса.

Решение:

1. Поскольку конкурент активной рекламной кампанией переманил к себе часть покупателей, спрос на синие трахтакумбы должен уменьшиться. **Уменьшаются цена и объем продаж.**
2. Повышение налога на прибыль приводит к сокращению предложения товара. **Уменьшается объем продаж, цена при этом увеличивается.**
3. В связи с экономическим кризисом происходит сокращение доходов потребителей. Поскольку низкокачественные синие трахтакумбы являются товаром низшей категории, спрос на них вырастет. **Увеличатся цена и объем продаж.**

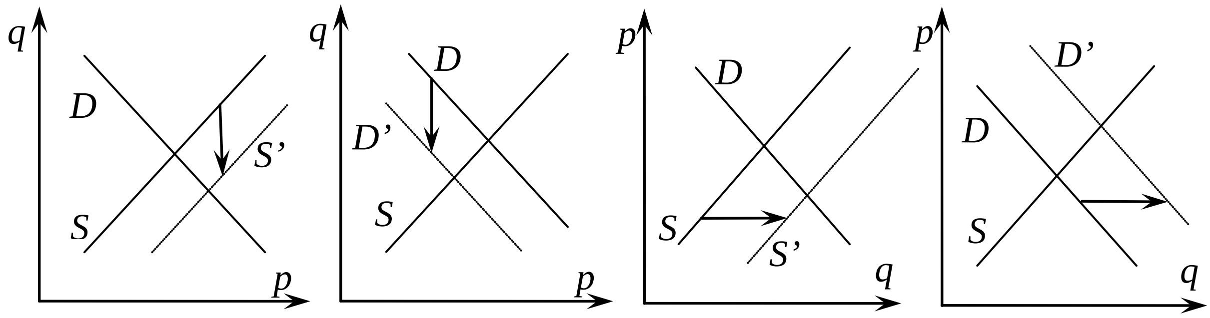


1 2 3

Задача 1.14

Сопоставить 4 графика изменения спроса и предложения с 4 ситуациями, складывающими на рынке бюджетных планшетников низкого качества. Ответ пояснить. Обратите внимание на расположение координатных осей.

1. Экономический кризис уменьшил доходы потребителей.
2. Производитель объявил о выходе новой более качественной модели.
3. Государство увеличило НДС.
4. Новые технологии позволяют удешевить производство планшетников.



A B C D

Решение:

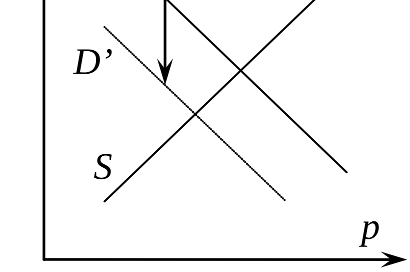
1. Бюджетные планшетники являются товаром низшей категории, спрос на которые растет при понижении доходов. Рост спроса (сдвиг вправо, вдоль оси объемов) изображен **на графике D**.
2. После объявления о выходе новой, более качественной модели потребитель будет ожидать ее выпуска, спрос на старую модель сократится. Сокращение спроса (сдвиг вниз) изображено **на графике B**.
3. Увеличение налога на добавленную стоимость приводит к сокращению предложения (сдвигу вниз), изображенному **на графике A**.
4. Новые технологии, удешевившие производство, увеличивают предложение (происходит сдвиг вправо), что изображено **на графике C**.

Ответ: 1D, 2B, 3A, 4C.

Задача 1.15

Конкурент понизил цену на продукцию. В результате этого цена и объем продаж нашей продукции изменились на 20%. Что произошло с выручкой?

Решение:



Конкурент, понизив цену, привлек часть наших покупателей. Соответственно, спрос на нашу продукцию сократился. Следовательно, и равновесная цена, и равновесный объем сократились на 20%: $p_2 = 0{,}8 p_1$, $q_2 = 0{,}8 q_1$, а выручка стала равной $TR_2 = 0{,}8 p_1 \cdot 0{,}8 q_1 = 0{,}64 p_1 q_1 = 0{,}64 TR_1$, т.е. **уменьшилась на 36%**.

Задача 1.16

Пусть p – цена (в тыс. руб.), а q – объем продаж (в тыс. шт.). Среди следующих зависимостей найти функции спроса и предложения. Объяснить.

1. $q = 20 - 2p$.
2. $q = -5 - 2p$.
3. $q = p^2 - 2p$.
4. $p = \sqrt{q + 25}$.

Решение:

Функция спроса является убывающей (при повышении цены количество сокращается), а предложения – возрастающей (при повышении цены количество также увеличивается). Кроме того, должны быть положительные значения цены, при которых объем продаж положителен.

1. $q = 20 - 2p$ – линейная убывающая функция спроса.
2. $q = -5 - 2p$ – поскольку при любых положительных ценах объем продаж всегда меньше нуля, функция не является ни спросом, ни предложением.
3. $q = p^2 - 2p$ – при $p > 2$ возрастающая функция предложения.
4. $p = \sqrt{q + 25}$, $q = p^2 - 25$ – при $p > 5$ возрастающая функция предложения.

Задача 1.17

Пусть годовой спрос на DVD-RW в Иркутске задан соотношением $p = 50 - 0{,}1q$, а в Шелехове – $p = 40 - 0{,}4q$. Здесь p – цена (в руб.), а q – объем продаж (в тыс. шт.). Если цена превышает уровень 50 руб. в Иркутске и 40 руб. в Шелехове, спрос становится нулевым. Найти суммарный спрос на DVD-RW в 2 городах.

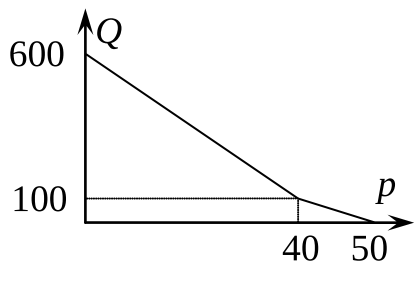
Решение:

Выразим объем продаж в Иркутске (q_1) и в Шелехове (q_2)через цену:

$q_1 = 500 - 10p$ при $p \le 50$ и $q_1 = 0$ при $p > 50$;

$q_2 = 100 - 2{,}5p$ при $p \le 40$ и $q_2 = 0$ при $p > 40$.

Суммарный спрос $Q = \begin{cases} 600 - 12{,}5p, & p \in [0;40]; \\ 500 - 10p, & p \in (40;50); \\ 0, & p \ge 50. \end{cases}$



Задача 1.18

Пусть p – цена путевки, тыс. руб., q – годовой объем продаж, шт. Спрос на путевки в Паттайю от компании «Hal-Tour» составляет $q_1 = 800 - 20p$, $p \le 40$, на путевки на Пхукет – $q_2 = 600 - 10p$, $p \le 60$, на Самуи – $q_3 = 400 - 5p$, $p \le 80$.

1. Оценить суммарный спрос на путевки в Таиланд при цене $p = 50$ тыс. руб.
2. Найти суммарную функцию спроса.

Решение:

При цене $p=50$ тыс. руб. спрос на путевки в Паттайю будет отсутствовать, поскольку $p>40$, спрос на путевки на Пхукет составит $q_2 = 600-10\cdot 50 = 100$ шт., а на Самуи – $q_3 = 400-5\cdot 50 = 150$ шт. Следовательно, суммарный спрос составит **250 путевок**.

Составим суммарную функцию спроса с учетом того, что спрос на путевки в каждый из регионов существует лишь в определенном ценовом диапазоне.

$$Q = \begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1800 - 35p, & p \le 40, \\ q_2 + q_3 = 1000 - 15p, & p \in (40; 60], \\ q_3 = 400 - 5p, & p \in (60; 80), \\ 0, & p \ge 80. \end{cases}$$

Задача 1.19

Суточный спрос на чипсы задан функцией $q_D = 270-6p$. Сколько упаковок будет куплено по цене 30 руб.? По какой цене чипсы перестанут покупать? При какой цене магазин получит максимальную выручку? Будет ли при этом максимальна прибыль? Что можно посоветовать в этой ситуации производителю?

Решение:

По цене 30 руб. будет куплено 270 – $6\cdot 30$ = **90 упаковок**.

Чипсы перестанут покупать, когда спрос обратится в ноль: $270-6p=0$, p = **45 руб**. Выпишем функцию выручки: $TR = pq = p(270-6p) = 270p - 6p^2$, максимизируем ее, найдя вершину параболы: $p = 270/12 =$ **22,5 руб.**

Прибыль при этом **не будет максимальна**, поскольку прибыль равна разнице выручки и издержек, а издержки возрастают с ростом производства. Производителю можно посоветовать в этой ситуации **повысить цены**.

Задача 1.20

Известно, что при бесплатном входе на концерт придет 4 тыс. зрителей, а увеличение цены билета на каждый рубль сокращает их число на 5 чел. Какую цену за билет должны установить организаторы, если они хотят максимизировать выручку, сколько чел. придет на концерт и какова будет выручка?

Решение:

Спрос на билеты выражается функцией $q_D = 4000-5p$. Выручка равна произведению цены билетов и их числа, ее надо максимизировать:

$$TR = pq = p(4000-5p) = 4000p - 5p^2 \to \max.$$

Находим производную и приравниваем ее к нулю.

$4000 - 10p = 0,\quad p =$ **400 руб.,**

$q = 4000 - 5\cdot 400 =$ **2000 билетов**, $TR = 400\cdot 2000 =$ **800 тыс. руб.**

Задача 1.21

Известно, что, бесплатно раздавая диски, производитель компьютерных игрушек найдет 800 тыс. клиентов. Повышение цены на каждый рубль сокращает их количество на 1600 чел. Какую цену за диск должна установить фирма, максимизирующая свою выручку? Каковы будут объемы продаж и выручка?

Решение:

Спрос на диски выражается функцией $q_D = 800\,000 - 1600p$. Выручка равна произведению цены дисков и их числа, ее нужно максимизировать:

$$TR = pq = p(800\,000 - 1600p) = 800\,000p - 1600p^2$$

Находим производную и приравниваем ее к нулю.

$$800\,000p - 3200p = 0,\quad p = \mathbf{250\ руб.},$$

$$q = \mathbf{400\ тыс.\ дисков},\quad TR = \mathbf{100\ млн\ руб.}$$

Задача 1.22

Может ли рост цены на 10 % привести к росту выручки на 12,5 %? Может ли выручка возрасти на 12,5 % при понижении цены на 10 %? Насколько должен в каждом случае (если это возможно) измениться объем продаж? Все прочие факторы считать неизменными. Предположить отсутствие дефицита.

Решение:

При повышении цены объем продаж уменьшается. Поэтому выручка возрастает меньше, чем цена, т.е. **первое невозможно**.

Найдем, как должен измениться объем продаж для реализации второй ситуации. Пусть старые цена и объем продаж p_1 и q_1, а новые – p_2 и q_2. Поскольку цена понизилась на 10 %, $p_2 = 0{,}9p_1$. Поскольку выручка возросла на 12,5 %, $p_2q_2 = 1{,}125p_1q_1$, $q_2 = 1{,}125p_1q_1/p_2 = 1{,}125p_1q_1/0{,}9p_1 = 1{,}25q_1$. Объем продаж должен во втором случае **вырасти на 25 %**.

Задача 1.23

Пусть p – цена сноуборда (в тыс. руб.), q – объем продаж (в шт.). Июльский спрос задан соотношением $p = 8 - 0{,}01q$. В декабре он утроился. Определить декабрьский спрос на сноуборды.

Решение:

Необходимо обратить внимание, что утраиваются объемы продаж, а не цены, поэтому сначала надо переписать функцию спроса в форме зависимости объема продаж от цены $q = (8 - p)/0{,}01 = 800 - 100p$, а затем умножить ее на 3. Получим **декабрьский спрос: $q = 2400 - 300p$.**

Задача 1.24

Известно, что при цене 180 руб./кг на рынке продается 800 кг черешни в день, а при цене 260 руб./кг – 300 кг. Предполагая линейный спрос на черешню, оценить объем продаж при цене 200 руб./кг.

Решение:
Увеличение цены на 80 руб. (со 180 до 260) приводит к сокращению продаж на 500 кг (с 800 до 300). Соответственно увеличение цены на 20 руб. приведет к сокращению продаж на $q = 500 \cdot 20 / 80 = 125$ кг. Таким образом, объем продаж составит 800 – 125 = **675 кг.**

Задача 1.25

Пусть p – цена мороженого (в руб.), q – объем продаж (в млн шт.). Апрельский спрос задан функцией $q_D = 6 - 0{,}2p$. В мае он увеличился на 40 %. Определить функцию майского спроса на мороженое. Каков будет спрос при цене 20 руб.? При какой цене мороженое перестанут покупать совсем?
Решение:
В мае спрос увеличивается на 40 % или в 1,4 раза. Зависимость будет иметь вид $q_D = 1{,}4(6 - 0{,}2p) = 8{,}4 - 0{,}28p$. При цене 20 руб. спрос составит $q = 8{,}4 - 0{,}28 \cdot 20 =$ **2,8 млн шт.** Найдем, при какой цене спрос станет нулевым: $8{,}4 - 0{,}28p = 0$, $p = 8{,}4/0{,}28 =$ **30 руб.**

Задача 1.26

Суточный спрос на муку в некотором магазине задан функцией $q_D = 2200 - 75p$, а предложение – функцией $q_S = p^2 - 176$. Здесь p – цена, руб., а q – объем продаж, кг. Найти равновесную цену и объем продаж. Как они изменятся, если после закрытия соседнего магазина спрос вырастет вдвое?
Решение:
Приравняем функции спроса и предложения и найдем точку равновесия:

$$2200 - 75p = p^2 - 176, \quad p^2 + 75p - 2376 = 0,$$
$$D = 5625 + 4 \cdot 2376 = 15\,129 = 123^2$$
$$p^* = (-75 + 123)/2 = 24, \quad q^* = 24^2 - 176 = 400.$$

После удвоения спроса он станет равен $q_D = 2(2200 - 75p) = 4400 - 150p$.

$$4400 - 150p = p^2 - 176, \quad p^2 + 150p - 4576 = 0,$$
$$D = 22\,500 + 4 \cdot 4576 = 40\,804 = 202^2,$$
$$p^* = (-150 + 202)/2 = 26, \quad q^* = 26^2 - 176 = 500.$$

Таким образом, после закрытия соседнего магазина цена муки вырастет **с 24 до 26 руб.**, а объем продаж – **с 400 до 500 кг**.

Задача 1.27*

Малое предприятие «Сладкая жизнь» ежедневно выпекает торты в объеме $q_S = 3p - 300$, где p – цена торта в рублях. Ежедневный объем спроса составляет $q_D = 300 - p$. Каким образом изменится равновесный объем продаж и равновесная цена торта, если государство примет решение взимать с каждого проданного торта налог в размере 16 руб.?

Решение:
Найдем равновесную точку в начальной ситуации, приравняв объем спроса и объем предложения:

$$3p - 300 = 300 - p, \quad \boldsymbol{p^*=150}, \ \boldsymbol{q^*=150}.$$

После введения налога уменьшается предложение тортов, поскольку теперь производитель получает не всю цену p, а величину $p - 16$

$$q_S = 3(p - 16) - 300 = 3p - 348.$$

С потребителем же ситуация остается прежней. Приравняв спрос и предложение, найдем новую равновесную точку:

$$3p - 348 = 300 - p, \quad \boldsymbol{p^{**}=162}, \ \boldsymbol{q^{**}= 138}.$$

Задача 1.28*

Предприятие ежедневно производит лекарство в количестве $q_S = 2p - 80$. Ежедневный объем спроса составляет $q_D = 130 - p$. Как и насколько изменится равновесный объем продаж и равновесная цена, если государство примет решение дотировать каждую единицу продукции в размере 15 руб.?

Решение:
Приравняв спрос и предложение, найдем точку равновесия в ситуации до введения государственной дотации:

$$130 - p = 2p - 80, \quad 3p = 210, \quad p^* = 70, \quad q^* = 130 - 70 = 60.$$

Введение дотации приведет к росту предложения. При цене p производитель получает $(p + 15)$ руб. и готов предоставить на рынок лекарство в объеме $q_S = 2(p + 15) - 80 = 2p - 50$. Таким образом, в новой ситуации

$$130 - p = 2p - 50, \quad 3p = 180, \quad p^{**} = 60, \quad q^{**} = 130 - 60 = 70.$$

Таким образом, введение государственной дотации сократит цену лекарства с **70 до 60 руб.** и увеличит ежедневный объем продаж с **60 до 70 упаковок**.

Задача 1.29*

Спрос на пиво задан функцией $q_D = 390 - 13p$, где p – цена (в руб.), а q – объем продаж (в тыс. бут.). Фирма производит его в количестве $q_S = 20p - 270$. Как и насколько изменится равновесный объем продаж и равновесная цена, если государство примет решение взимать с производителей дополнительный налог 15% с выручки?

Решение:
Найдем исходную точку равновесия, приравняв спрос и предложение:

$$390 - 13p = 20p - 270, \quad 33p = 660, \quad p^* = 20, \quad q^* = 390 - 13 \cdot 20 = 130.$$

После введения налога фирма получит 85% стоимости продукции, а значит, функция предложения станет иметь вид $q_S = 20 \cdot 0{,}85p - 270 = 17p - 270$.

$$390 - 13p = 17p - 270, \quad 30p = 660, \quad p^* = 22, \quad q^* = 390 - 13 \cdot 22 = 104.$$

Таким образом, **цена повысится с 20 до 22 руб.**, а **объем продаж сократится со 130 до 104 тыс. бутылок**.

Задача 1.30*

Месячный спрос на говядину на иркутском рынке составляет $q_D = 408 - 1{,}2p$, а предложение $q_S = 0{,}6p - 24$. Здесь p – цена, руб., а q – объем продаж, т. Найти объем продаж на третий месяц в условиях динамической паутинообразной модели рынка, если в первый месяц на рынок будет привезено 192 т говядины. Является ли процесс сходящимся, расходящимся или постоянным?

В паутинообразной модели объем привезенной продукции определяется из функции предложения на основе цены предыдущего месяца, а цена – из функции спроса при подстановке объема текущего месяца.

Решение:

Равновесную точку найдем, приравняв спрос и предложение:

$$408 - 1{,}2p = 0{,}6p - 24, \quad 1{,}8p = 432, \quad p^* = 240 \text{ руб.}, \quad q^* = 120 \text{ т.}$$

Из уравнения спроса $q_D = 408 - 1{,}2p$ выразим цену $p_D = 340 - 5/6\,q$. Отсюда,

$$p_1 = 340 - 5/6\,q_1 = 340 - 5/6 \cdot 192 = 180,$$
$$q_2 = 0{,}6p_1 - 24 = 0{,}6 \cdot 180 - 24 = 84,$$
$$p_2 = 340 - 5/6\,q_2 = 340 - 5/6 \cdot 84 = 270,$$
$$q_3 = 0{,}6p_2 - 24 = 0{,}6 \cdot 270 - 24 = 138.$$

Поскольку $q_3 = 138$ ближе к $q^* = 120$, чем $q_1 = 192$, а функции спроса и предложения линейные, то **процесс сходящийся.**

Задача 1.31*

Месячный спрос на журнал «Источник смысла» задан соотношением $q_D = 500 - 6p$ (тыс. экз.), а месячное предложение – соотношением $q_S = 4p - 100$ (тыс. экз.). Найти цены и объемы продаж за первые три месяца в условиях паутинообразной модели с запаздыванием предложения, если изначальная цена журнала составляла 56 руб. Является ли процесс сходящимся, расходящимся или постоянным?

В паутинообразной модели с запаздыванием предложения продажи текущего месяца зависят от текущей цены, а цена, устанавливаемая фирмой в будущем месяце, зависит от нынешних продаж.

Решение:

Из предложения $q_S = 4p - 100$ можно выразить цену $p_S = 25 + q/4$. Отсюда,

$$q_1 = 500 - 6p_1 = 500 - 6 \cdot 56 = 164, \qquad p_2 = 25 + q_1/4 = 25 + 164/4 = 66,$$
$$q_2 = 500 - 6p_2 = 500 - 6 \cdot 66 = 104, \qquad p_3 = 25 + q_2/4 = 25 + 104/4 = 51,$$
$$q_3 = 500 - 6p_3 = 500 - 6 \cdot 51 = 194.$$

Равновесную точку найдем, приравняв спрос и предложение:

$$500 - 6p = 4p - 100, \quad 10p = 600, \quad p^* = 60 \text{ (руб.)}, \quad q^* = 140 \text{ (тыс. экз.)}.$$

Поскольку $p_3 = 51$ дальше от равновесной цены $p^* = 60$, чем $p_1 = 56$, то **процесс расходящийся.**

Задача 1.32*

Спрос и предложение на российском рынке гречки в августе 2010 г. имели вид $q_D = 120 - p$ и $q_S = 4p - 30$ (тыс.т.) соответственно. В сентябре из-за засухи предложение сократилось на 40%. При этом равновесная цена увеличилась на 75%. Как изменился спрос на гречку? Как изменились объемы продаж?

Решение:

Найдем равновесную цену гречки в августе путем приравнивания спроса и предложения: $120 - p = 4p - 30$, $5p = 150$, $p^* =$ **30 руб.**, $q^* =$ **90 тыс.т.**

В сентябре равновесная цена выросла на 75%, составив $p^{**} = 30 \cdot 1{,}75 =$ **52,5 руб.**, при этом предложение приняло вид $q_S = 0{,}6 \cdot (4p - 30) = 2{,}4p - 18$, а равновесный объем оказался равным $q^{**} = 2{,}4 * 52{,}5 - 18 =$ **108 тыс. т.** Найдем, во сколько раз для этого должен был увеличиться спрос:

$$q^{**} = 108 = \alpha(120 - p^{**}) = \alpha(120 - 52{,}5) = 67{,}5\alpha, \quad \alpha = 108/67{,}5 = \textbf{1,6 раза.}$$

Спрос на гречку вырос **на 60 %**, продажи увеличились **с 90 до 108 тыс.т.**

Задача 1.33*

Спрос и предложение на рынке сахара в Иркутске представлены соответственно функциями $q_D^1 = 1700 - 40p$ и $q_S^1 = 20p - 400$, а в Улан-Удэ – $q_D^2 = 1050 - 30p$ и $q_S^2 = 10p - 150$. Здесь p – цена, руб./кг, q – месячный объем продаж в тоннах.

1. Найти равновесные цены и объемы продаж сахара в каждом городе.
2. Найти равновесную цену и объем продаж в каждом городе, если возможна бесплатная транспортировка сахара из города в город. Указать объем перевозки.
3. Что произойдет, если перевозка каждого килограмма сахара между городами будет обходиться продавцу в 2,5 руб.?

Решение:

1. Найдем равновесную точку для каждого города, приравняв спрос и предложение:

$$1700 - 40p = 20p - 400, \quad p^1 = \textbf{35 руб.}, \quad q^1 = 20 \cdot 35 - 400 = \textbf{300 т.}$$

$$1050 - 30p = 10p - 150, \quad p^2 = \textbf{30 руб.}, \quad q^2 = 10 \cdot 30 - 150 = \textbf{150 т.}$$

2. При бесплатной транспортировке два рынка превращаются в один с едиными ценами. Приравняем суммарный спрос и суммарное предложение:

$$(1700 - 40p) + (1050 - 30p) = (20p - 400) + (10p - 150),$$

$$2750 - 70p = 30p - 550, \quad 100p = 3300, \quad p^* = \textbf{33 руб.}$$

   При такой цене иркутский спрос составит $q_D^1 = 1700 - 40 \cdot 33 = 380$ т, а иркутское предложение $q_S^1 = 20 \cdot 33 - 400 = 260$ т. Дефицит в 380 – 260 = = 120 т будет компенсирован улан-удэнским сахаром. Действительно, спрос в Улан-Удэ равен $q_D^2 = 1050 - 30 \cdot 33 = 60$ т, а предложение $q_S^2 = 10 * 33 - 150 = 180$ т. Следовательно, **объем перевозок равен 120 т**, объем продаж в Иркутске **380 т.**, а в Улан-Удэ **– 60 т.**

3. Если перевозка каждого килограмма стоит 2,5 руб., то цена сахара в Иркутске (городе с дефицитом сахара) установится на уровне, ровно на 2,5 руб. большем цены в Улан-Удэ (городе с избытком сахара). Обозначим цену в Улан-Удэ за p. В Иркутске тогда она составит $(p + 2{,}5)$ руб. Суммарный спрос в 2 городах приравняем к суммарному предложению:
$$(1700 - 40(p + 2{,}5)) + (1050 - 30p) = (20(p + 2{,}5) - 400) + (10p - 150),$$
$$2650 - 70p = 30p - 500,\ \ 100p = 3150,\ \ p^* = \textbf{31,5 руб.}$$
Цена в Иркутске составит **34 руб.** Иркутский спрос (он же – объем продаж) предполагается в размере $q_D^1 = 1700 - 40 * 34 =$ **340 т**, а иркутское предложение $q_S^1 = 20 \cdot 34 - 400 = 280$ т. Отсюда получаем **объем перевозок сахара** 340 – 280 = **60 т.**

Задача 1.34*

Спрос на автомобили задан соотношением $q_D = \left(400(10 \cdot I - p) - (10 \cdot I - p)^2\right)/p$, где I – среднемесячный доход (тыс. руб.), а p – цена автомобиля (тыс. руб.).

1. Сколько автомобилей «Лада» ценой 300 тыс. руб. купят потребители с месячными доходами 40 тыс. руб.?
2. Каковы доходы типичного покупателя «Ё-мобиля» ценой 400 тыс. руб.?
3. Является ли «Тойота» ценой 800 тыс. руб. нормальным товаром или товаром низшей категории для людей с месячными доходами 110 тыс. руб.?
4. Какие автомобили больше всего покупают люди со среднемесячным доходом в 72 тыс. руб.?

Решение:

1. Подставим значения в функцию спроса и выясним что потребители с месячным доходом 40 тыс. руб. приобретут автомобили «Лада» ценой 300 тыс. руб. в количестве $q_D = \left(400(10 \cdot 40 - 300) - (10 \cdot 40 - 300)^2\right)/300 =$ **100 шт.**
2. Найдем зависимость спроса на «Ё-мобиль» ценой 400 тыс. руб. в зависимости от дохода: $q_D = \left(400(10 \cdot I - 400) - (10 \cdot I - 400)^2\right)/400 = -I^2/4 + 30I - 800$. Максимум данной функции достигается при $I^* = 60$. Таким образом, типичный покупатель «Ё-мобиля» зарабатывает в месяц **60 тыс. руб.**
3. Проведем те же вычисления для автомобиля «Тойота» ценой 800 тыс.руб.: $q_D = \left(400(10 \cdot I - 800) - (10 \cdot I - 800)^2\right)/800 = -I^2/8 + 25I - 1200$. Максимум спроса достигается при $I^* = 25/(2 \cdot 1/8) = 100$. Соответственно при I = 110 тыс.руб. спрос убывает с ростом дохода, **«Тойота» является товаром низшей категории.**
4. Найдем зависимость спроса от цены при месячном доходе I = 72 тыс.руб.: $q_D = \left(400(10 \cdot 72 - p) - (10 \cdot 72 - p)^2\right)/p = -230\,400/p + 1040 - p$. Найдем точку максимума спроса, для чего приравняем производную спроса к нулю:
$$q'_D = 230\,400/p^2 - 1 = 0,\quad p^* = \sqrt{230\,400} = 480 \text{ тыс.руб.}$$
Следовательно, для людей с месячным доходом 72 тыс.руб. типичной ценой покупаемого автомобиля будет **480 тыс. руб.**

2. ЭЛАСТИЧНОСТЬ И ЕЕ ВИДЫ

Задача 2.1

Проранжируйте блага по ценовой эластичности спроса – для какого из них эластичность по абсолютной величине будет минимальна, для какого больше, еще больше и, наконец, самая большая: одежда, молоко, соль, ресторанные блюда. Ответ объяснить.

Решение:

Самая низкая по абсолютной величине эластичность у **соли** – это товар первой необходимости, заменители полностью отсутствуют, расходы на соль занимают крайне малую долю в семейном бюджете, поэтому даже резкое увеличение цены практически не повлияет на объем потребления.

Чуть выше эластичность **молока** – доля расходов на молоко несколько больше. Тем не менее адекватных заменителей молока нет, и существенного сокращения потребления не будет даже при значительном повышении цены.

Эластичность спроса на **одежду** еще выше. При подорожании люди начинают покупать одежду в более дешевых магазинах или перешивать старые вещи.

Наиболее высокая эластичность у **ресторанных блюд**. Это товар роскоши. При подорожании многие люди в состоянии отказаться от данного блага.

Задача 2.2

Заданы значения эластичности спроса от доходов населения в краткосрочном и долгосрочном периодах на квартиры, мебель и одежду. Определить, какому товару какая строчка данных соответствует. Ответ объяснить.

Краткосрочный период	Долгосрочный период
0,95	1,17
0,07	2,45
2,60	0,53

Решение:

Даже значительное повышение доходов в краткосрочном периоде не приведет к серьезному увеличению спроса на **квартиры** (квартира – слишком дорогой товар, чтобы его можно было купить сразу). В долгосрочном же периоде покупка квартир при повышении доходов становится возможной. То есть эластичность в долгосрочном периоде должна быть гораздо больше, чем в краткосрочном, что соответствует второй строке **(0,07 $\rightarrow$ 2,45)**.

Для **мебели** ситуация противоположная – повышение доходов уже в краткосрочном периоде позволяет приобрести новую мебель. Однако в долгосрочном периоде повторное приобретение мебели, как правило, уже не требуется. Поэтому эластичность в долгосрочном периоде меньше, чем в краткосрочном – третья строка **(2,60 $\rightarrow$ 0,53)**.

Оставшаяся первая строка **(0,95 $\rightarrow$ 1,17)** соответствует **одежде**. Эластичность слабо меняется в долгосрочном периоде относительно краткосрочного.

Задача 2.3

Известны данные (значения $\varepsilon_C = -1{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}8;\ 2{,}6$) о перекрестной эластичности спроса на следующие пары товаров:

1. Чай и кофе
2. Хлеб и молоко
3. Автомобили и бензин
4. Автомобили Subaru Forrester и Nissan X-trail

Соотнести численные значения эластичности с парами товаров. Объяснить.

Решение:

Перекрестная эластичность показывает, на сколько процентов изменяется спрос при изменении цены другого товара на 1 %.

Среди примеров есть единственная пара дополняющих товаров: **автомобили и бензин**. Для нее эластичность будет отрицательна: $\varepsilon_C = -1{,}5$.

Хлеб и молоко можно считать практически независимыми товарами, эластичность для которых близка к нулю: $\varepsilon_C = 0{,}1$.

Чай и кофе являются товарами-заменителями, хотя и не очень близкими. Эластичность положительная: $\varepsilon_C = 0{,}8$.

Две марки автомобиля одного класса являются близкими заменителями. Перекрестная эластичность очень высока: $\varepsilon_C = 2{,}6$.

Задача 2.4

Эластичность спроса на «Пепси-колу» по цене «Кока-колы» равна 5. «Кока-кола» подешевела на 10 %. Как изменятся продажи «Пепси-колы»?

Решение:

Перекрестная эластичность равна отношению процентного изменения спроса к процентному изменению цены другого товара:

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p_{\text{др.тов.}}},\quad 5 = \frac{\%q}{-10\%},\quad \%q = -50\%.$$

Таким образом, продажи «Пепси-колы» **упадут на 50 %**.

Задача 2.5

На рынке меховых изделий работает фирма «Мехалыч», продающая шапки по 3 тыс. руб. При этом ценовая эластичность спроса составляет $\varepsilon = -2$. Каким образом фирма должна изменить цену, чтобы увеличить объем продаж в 1,5 раза?

Решение:

Эластичность показывает отношение процентного изменения спроса к процентному изменению цены. Продажи должны вырасти на 50 %:

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p},\quad -2 = \frac{50\%}{\%p},\quad \%p = \frac{50\%}{-2} = -25\%.$$

Уменьшение цены на 25 % означает, что шапки необходимо продавать по цене 3000·0,75 = **2250 руб.**

Задача 2.6

Производители телевизоров перепрофилировали часть мощностей предприятий на выпуск компьютерных мониторов. Это привело к росту средней цены на телевизоры с 5000 до 5500 руб. По старым ценам производители еженедельно реализовывали 10 000 телевизоров. Сколько телевизоров в неделю продается по новым ценам, если известно, что коэффициент ценовой эластичности спроса на телевизоры при цене 5000 руб. равен –2,5?

Решение:

Эластичность показывает отношение процентного изменения спроса к процентному изменению цены. Цена увеличилась на 10%.

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -2{,}5 = \frac{\%q}{10\%}, \quad \%q = (-2{,}5)\cdot 10\% = -25\%.$$

Следовательно, спрос должен упасть на 25%. То есть по новым ценам будет продаваться $10000 \cdot 0{,}75$ = **7500 телевизоров**.

Задача 2.7

Издатель журнала понизил цену на свое издание с 50 до 45 руб. По старым ценам распродавался тираж 80 тыс. экз. Каков будет тираж журнала в новой ситуации, если известно, что коэффициент ценовой эластичности спроса при цене 50 руб. равен –3?

Решение:

Цена журнала сокращается с 50 до 45 руб., таким образом, новая цена составляет $45/50 = 0{,}9 = 90\%$ от старой, сокращение равняется 10%.

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -3 = \frac{\%q}{-10\%}, \quad \%q = -3\cdot(-10\%) = 30\%.$$

Новый тираж будет в 1,3 раза больше и составит 1,3·80 = **104 тыс. экз.**

Задача 2.8

Косметическая компания продает ежемесячно по 400 упаковок крема при цене 80 руб. До какого уровня она может поднять цену, чтобы продажи упали не ниже 300 упаковок в месяц, если известно, что коэффициент ценовой эластичности спроса на крем при цене 80 руб. равен –2?

Решение:

Эластичность равняется отношению процентного изменения спроса к процентному изменению цены. Объем продаж сокращается с 400 до 300 руб., новый объем составляет $300/400 = 0{,}75 = 75\%$ от старого, сокращение составляет 25%.

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -2 = \frac{-25\%}{\%p}, \quad \%p = \frac{-25\%}{-2} = 12{,}5\%.$$

Цену можно повысить на 12,5% до уровня 80·1,125 = **90 руб.**

Задача 2.9

Мировые цены на нефть выросли на 20 %. Как изменилась выручка от продажи нефти, если ценовая эластичность спроса на нефть равна –0,25? Эластичность указана для начальной ситуации.

Решение:

Эластичность равна отношению процентного изменения спроса к процентному изменению цены:

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -0{,}25 = \frac{\%q}{20\%}, \quad \%q = -0{,}25 \cdot 20\% = -5\%.$$

Выручка равна произведению цены и объема продаж:

$$TR = 1{,}2p \cdot 0{,}95q = 1{,}14pq.$$

Таким образом, **выручка от продажи нефти выросла на 14 %**.

Задача 2.10

Эластичность спроса на DVD-диски по цене равна –2, а по доходу равна 1,5. Цена DVD-дисков упала на 30 %. Доходы населения выросли на 10 %. Как изменился объем продаж? Эластичности указаны для начальной ситуации.

Решение:

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -2 = \frac{\%q}{-30\%}, \quad \%q = 60\%.$$

$$\varepsilon_I = \frac{\%q}{\%I}, \quad 1{,}5 = \frac{\%q}{10\%}, \quad \%q = 15\%.$$

Таким образом, за счет понижения цены спрос вырос в 1,6 раза, а за счет повышения доходов еще в 1,15 раза. Итоговое увеличение составило 1,6·1,15 = 1,84 раза, т.е. **объем продаж вырос на 84 %**.

Задача 2.11

Эластичность продаж билетов на мюзикл по цене составляет –3, а эластичность спроса по рекламе равна 2. Театр мюзикла решил повысить цены на 10 %, одновременно увеличив рекламный бюджет на 20 %. Как изменится спрос на билеты? Произойдет ли ожидаемое расширение продаж?

Решение:

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -3 = \frac{\%q}{10\%}, \quad \%q = -3 \cdot 10\% = -30\%.$$

$$\varepsilon_A = \frac{\%q}{\%A}, \quad 2 = \frac{\%q}{20\%}, \quad \%q = 2 \cdot 20\% = 40\%.$$

Таким образом, за счет повышения цены спрос на билеты упал на 30 %, а за счет увеличения рекламы расширился на 40 %. Под влиянием двух факторов спрос изменится в 0,7·1,4 = 0,98 раза, т.е. **упадет на 2 %**. Расширения продаж **не произойдет**.

Задача 2.12

Эластичность спроса на отдых в однозвездочном отеле «Ночлежка» по цене равна –0,5, а по доходу равна –2. Как изменятся продажи путевок, если отель объявит пятидесятипроцентную скидку в условиях экономического подъема, увеличившего доходы населения на 20 %? Эластичности указаны для начальной ситуации.

Решение:

Эластичность спроса по цене равна отношению процентного изменения спроса к процентному изменению цены, а эластичность спроса по доходу – процентного изменения спроса к процентному изменению дохода. Подставим в формулы имеющиеся данные:

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \qquad -0{,}5 = \frac{\%q}{-50\%}, \qquad \%q = -0{,}5\cdot(-50\%) = 25\%$$

$$\varepsilon_I = \frac{\%q}{\%I}, \qquad -2 = \frac{\%q}{20\%}, \qquad \%q = -2\cdot 20\% = -40\%.$$

За счет понижения цены спрос вырастет на 25 % (в 1,25 раза), а за счет повышения доходов – упадет на 40 % (изменение в 0,6 раза). Итоговое изменение составит 1,25·0,6 = 0,75 раза, т.е. **продажи путевок упадут на 25 %.**

Задача 2.13*

Известно, что эластичность спроса на авиабилеты по цене равна –3, по доходу 2,5, а по цене билетов конкурирующей авиакомпании 4. Ожидается, что в следующем году доходы населения вырастут на 10 %, при этом конкурент объявил о снижении цен на 10 %. Какую ценовую политику должна проводить авиакомпания, если она расширила парк самолетов с 20 до 24 и желает достичь соответствующего роста продаж билетов.

Решение:

$$\varepsilon_I = \frac{\%q}{\%I}, \qquad 2{,}5 = \frac{\%q}{10\%}, \qquad \%q = 2{,}5\cdot 10\% = 25\%$$

$$\varepsilon_C = \frac{\%q}{\%p_{\text{конк}}}, \qquad 4 = \frac{\%q}{-10\%}, \qquad \%q = 4\cdot(-10\%) = -40\%.$$

Видим, что под влиянием роста доходов спрос вырос на 25 %, т.е. в 1,25 раза. Под влиянием снижения цен билетов конкурирующей авиакомпании спрос упал на 40 %, т.е. составил 0,6 от первоначального. При этом общее желаемое расширение спроса составляет 24 / 20 = 1,2 раза. Получим соотношение: $1{,}2 = x\cdot 1{,}25\cdot 0{,}6$. Отсюда $x = 1{,}6$. Таким образом, за счет снижения цены необходимо увеличить спрос еще на 60 %.

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \qquad -3 = \frac{60\%}{\%p}, \qquad \%p = \frac{60\%}{-3} = -20\%.$$

Таким образом, авиакомпания для обеспечения желаемого роста продаж будет вынуждена **снизить цены на 20 %**.

Задача 2.14*

В процессе исследования рынка, проведенного АО «ИзНаКурНож», было установлено, что ценовая эластичность спроса на новую модель ступы составляет –2,22, эластичность спроса от доходов покупателей равна 2, а эластичность спроса от цены ковров-самолетов равна 0,5. Аналитики предсказывают, что из-за нестабильности на Ближнем Востоке цены на ковры-самолеты в будущем году возрастут в 1,4 раза. Одновременно в связи с переизбранием на тысячный срок Кащея Бессмертного ожидается рост доходов населения на 2,5 %. Как АО «ИзНаКурНож» должно изменить цену на новую модель ступы, чтобы добиться увеличения объема продаж в будущем году на 40 %?

Решение:

Увеличение доходов населения на 2,5 % приведет к увеличению спроса на ступы на $2{,}5\% \cdot 2 = 5\%$, т.е. в 1,05 раза.

Рост цен на ковры-самолеты в 1,4 раза повлечет за собой увеличение спроса на ступы на $40\% \cdot 0{,}5 = 20\%$, т.е. в 1,2 раза.

И наконец, изменение цены на новую модель ступы на x % должно изменить спрос на $-2{,}22x$ %, т.е. в $(1 - 0{,}0222x)$ раза.

Суммарно это должно дать увеличение объема на 40 %, т.е. в 1,4 раза.

$$1{,}05 \cdot 1{,}2 \cdot (1 - 0{,}0222x) = 1{,}4,$$
$$1 - 0{,}0222x = 1{,}4/1{,}05/1{,}2 = 1{,}111,$$
$$x = -5.$$

Таким образом, АО «ИзНаКурНож» должно понизить цены **на 5 %.**

Задача 2.15*

В регионе, где выращивалась половина всей пшеницы, из-за плохих погодных условий урожай по сравнению с прошлым годом сократился на 20 %. В других регионах урожай остался на прошлогоднем уровне. Как изменится совокупная выручка всех фермеров, если ценовая эластичность спроса на зерно составляет –0,5?

Решение:

$$q_2 = 0{,}5q + 0{,}8 \cdot 0{,}5q = 0{,}9q,$$

т.е. в целом по всем регионам урожай пшеницы сократился на 10 %. Ценовая эластичность спроса равна –0,5.

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -0{,}5 = \frac{-10\%}{\%p}, \quad \%p = \frac{-10\%}{-0{,}5} = 20\%.$$

Таким образом, цена пшеницы возрастет на 20 %, $p_2 = 1{,}2p$.

Совокупная выручка фермеров, равная произведению цен и объемов продаж,

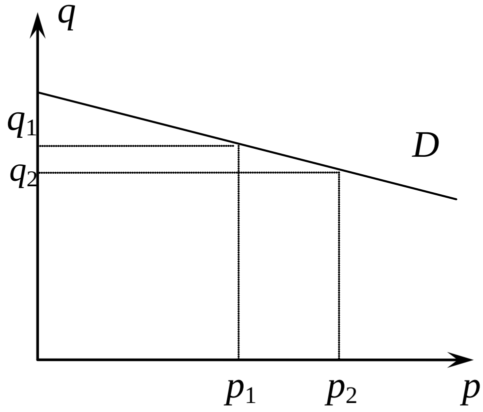
$$TR_2 = 1{,}2p \cdot 0{,}9q = 1{,}08pq,$$

вырастет на 8 %. Таким образом, неурожай благоприятно сказывается на средних доходах фермеров, благодаря существенному повышению цен

Задача 2.16

Монополист работает на рынке с неэластичным спросом. Как он должен изменить цену с целью максимизации прибыли? Ответ поясните.

Решение:

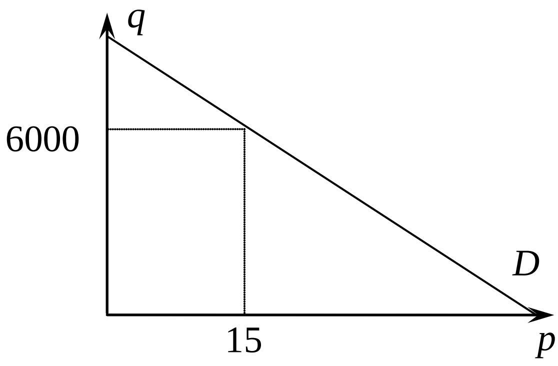


В зоне неэластичного спроса даже серьезное повышение цены ведет лишь к небольшому падению спроса. Таким образом, выручка (на графике изображена прямоугольниками) с ростом цены вырастет. Издержки в этой ситуации снизятся в связи с сокращением объема продаж. Таким образом, прибыль фирмы увеличится **при повышении цены**.

Задача 2.17*

Известно, что спрос на журнал «Афиша Иркутска» линейно убывает с ростом цены. При текущей цене 15 руб. распространяется 6000 экз. Найти функцию спроса, если известно, что текущая эластичность равна –0,5. Отыскать, при какой цене издатель получит максимальную выручку.

Решение:



Линейная функция спроса имеет вид

$$q = a - bp,$$

а эластичность спроса по цене

$$\varepsilon = q' \, p/q = -bp/(a - bp).$$

Подставим все имеющиеся в задаче данные, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6000 = a - 15b, \\ -0{,}5 = -15b / 6000. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем $b = -0{,}5 \cdot 6000/(-15) = 200$, подставив его в первое уравнение, отыщем $a = 6000 + 15 \cdot 200 = 9000$ и спрос $q_D = 9000 - 200p$. Максимизируем выручку, равную произведению цены и объема продаж:

$$TR = pq = p(9000 - 200p) = 9000p - 200p^2 \to \max.$$

Приравняв производную к нулю ($TR' = 9000 - 400p = 0$), найдем, что максимальная выручка будет при цене 9000/400 = **22,5 руб**.

Задача 2.18*

Эластичность спроса на авиабилеты по цене равняется –2,5. В связи с полупустыми (заполненными на 50 %) самолетами, авиакомпания снизила цены на перелет с 7500 до 6000 руб. Как изменились продажи билетов? Выросла или упала выручка авиакомпании? Эксперт посоветовал для максимизации прибыли снизить цены еще сильнее с целью полного заполнения самолетов. Прав ли он? Предположить, что спрос на авиабилеты имеет линейный вид.

Решение:

Новая цена авиабилета составила $6000/7500 = 0{,}8 = 80\ \%$ от первоначальной, снизившись на 20%. Выписав формулу, найдем **рост продаж на 50 %:**

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -2{,}5 = \frac{\%q}{-20\%}, \quad \%q = 50\%.$$

Выручка, равная произведению цены и объемов, **выросла** при этом **на 20 %:**

$$TR_1 = 0{,}8p \cdot 1{,}5q = 1{,}2pq = 1{,}2TR_0.$$

Чтобы полностью заполнить самолеты, потребуется увеличить на 100% продажу билетов, что произойдет при **падении цены на 40 % (до 4500 руб.)**:

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -2{,}5 = \frac{100\%}{\%p}, \quad \%p = -40\%.$$

Выручка при этом так же, как и в первом случае, **вырастет на 20 %:**

$$TR_2 = 0{,}6p \cdot 2q = 1{,}2pq = 1{,}2TR_0.$$

Однако во второй ситуации при большем количестве пассажиров увеличатся издержки, а, следовательно, **уменьшится прибыль** авиакомпании. **Эксперт не прав.**

Задача 2.19*

Известно, что эластичность спроса на билеты на открытие олимпиады в Сочи при цене 560 \$ равняется –2, при этом объем продаж составит 42 тыс. шт. При предположении о линейном спросе найти цену, максимизирующую выручку организаторов, и соответствующее количество проданных билетов.

Решение:

Пусть функция спроса на билеты имеет вид $q_D = a - bp$, тогда эластичность вычисляется как $\varepsilon = q'\, p/q$. Подставим известные данные, получим

$$-2 = -560b/42, \qquad b = 42 \cdot 2/560 = 0{,}15,$$

$$42 = a - 0{,}15 \cdot 560, \quad a = 42 + 0{,}15 \cdot 560 = 126.$$

Таким образом, функция спроса на билеты принимает вид $q_D = 126 - 0{,}15p$.

Максимизируем выручку организаторов:

$$TR = pq = 126p - 0{,}15p^2 \to \max, \quad 126 - 0{,}3p = 0,$$

$$p^* = \mathbf{420\$}, \quad q^* = 126 - 0{,}15 \cdot 420 = \mathbf{63\ тыс.\ билетов}.$$

Задача 2.20*

Спрос на недельные Байкальские туры задан линейной функцией, а издержки на организацию каждого составляют 10 тыс. руб. Турфирма-монополист установила цену, максимизирующую прибыль. Оказалось, что при этой цене эластичность спроса равна –5. По какой цене осуществляется продажа туров?

Решение:

Эластичность для линейного спроса $q = a - bp$ выражается функцией $\varepsilon = q' p/q = -bp/(a - bp)$. Фирма-монополист максимизирует свою прибыль:

$$\pi = pq - 10q = p(a - bp) - 10(a - bp) = ap - bp^2 - 10a + 10bp \to \max,$$

$$a + 10b - 2bp = 0, \quad p^* = a/2b + 5.$$

Подставим полученную оптимальную цену в функцию эластичности:

$$-(a/2 + 5b)/(a - a/2 - 5b) = -5, \quad a + 10b = 5(a - 10b), \quad 4a = 60b, \quad a = 15b.$$

Продажа туров осуществляется по цене $p^* = 15b/2b + 5 =$ **12,5 тыс. руб.**

Задача 2.21*

Функция спроса на космические полеты на корабле «SpaceShip 2» имеет вид $q_D = 300 - 0{,}5p$, где p – цена, тыс. долл., q – годовое количество полетов, шт. Известно, что компания установила цену, при которой эластичность спроса по цене равна –2. Найти эту цену и соответствующее количество полетов. При условии, что данная цена максимизирует прибыль компании, а суммарные издержки пропорциональны числу полетов, найти себестоимость одного полета.

Решение:

Построим функцию эластичности и найдем, когда ее значение равно –2:

$$\varepsilon(p) = q'(p)\frac{p}{q(p)} = \frac{-0{,}5p}{300 - 0{,}5p} = -2.$$

$0{,}5p = 2(300 - 0{,}5p)$, $1{,}5p = 600$, $\boldsymbol{p}$ **= 400 тыс. долл.**

Пусть себестоимость одного полета составляет c тыс. долл. Тогда функция прибыли будет иметь следующий вид:

$$\pi = (p - c)(300 - 0{,}5p) = 300p - 300c + 0{,}5cp - 0{,}5p^2.$$

Она достигает своего максимума, когда ее производная равна нулю:

$\pi' = 300 + 0{,}5c - p = 0$, $p = 300 + 0{,}5c = 400$, $\boldsymbol{c}$ **= 200 тыс. долл.**

Задача 2.22*

Канцмаркет «Ручной» продает шариковые ручки. Пусть $p \ge 0$ – их цена (руб.), а q – месячный объем продаж (тыс. шт.). Функция спроса имеет вид $q_D = 400/(p + 5) - 8$.

1. Найти максимально возможный объем продаж. Найти цену, по которой ручки полностью перестанут покупать.
2. Найти ценовую эластичность спроса при цене 15 руб. Нужно ли при этом повышать или понижать цену для максимизации выручки?
3. Если цена, максимизирующая прибыль, составляет 15 руб., а себестоимость одной ручки не зависит от объема продаж, найти эту себестоимость.

Решение:

1. Максимально возможный объем продаж достигается при нулевой цене: $q_D = 400/(0+5)-8=$ **72 тыс. шт.**

   Максимально возможной является цена, при которой спрос обращается в ноль: $400/(p+5)-8=0$, $p+5=50$, $p =$ **45 руб.**

2. $\varepsilon = q'\dfrac{p}{q} = -\dfrac{400}{(p+5)^2}\dfrac{p}{400/(p+5)-8}$.

   При $p=15$ $\varepsilon = -\dfrac{400}{(15+5)^2}\dfrac{15}{400/(15+5)-8} = -\dfrac{400}{400}\dfrac{15}{20-8} =$ **–1,25**.

   Поскольку $|\,\varepsilon\,|>1$, для повышения выручки нужно **понижать цену**.

3. Пусть себестоимость одной ручки равна c руб. Тогда прибыль составит

   $$\pi = TR-TC = pq-cq = (p-c)\left(\frac{400}{p+5}-8\right) = \frac{400p}{p+5}-\frac{400c}{p+5}-8p+8c \to \max,$$

   $$\pi' = \frac{400}{p+5}-\frac{400p}{(p+5)^2}+\frac{400c}{(p+5)^2}-8=0, \quad \frac{400p+2000-400p+400c}{(p+5)^2}=8,$$

   $2000+400c = 8(p+5)^2 = 8*20^2 = 3200$, $c = 1200/400 =$ **3 руб**.

Задача 2.23**

Концертное агентство планирует организовать в Москве выступление мировой знаменитости и оценивает спрос. Исследование показало, что эластичность спроса по цене выражается функцией $\varepsilon(p) = -0{,}5-0{,}25p$, где p – цена, тыс. руб. Также известно, что при цене 4 тыс. руб. на концерт придет 5 тыс. чел.

1. Определить оптимальную цену, при которой концертное агентство получит максимальную прибыль.
2. Построить функцию спроса на билеты.
3. С ее помощью оценить, в состоянии ли будет агентство обойтись без помощи спонсоров, если предполагаемые расходы составят 25 млн руб.
4. Оценить с помощью построенной функции спроса, достаточно ли будет концертной арены на 10 тыс. зрителей, если билеты предполагается продавать по 2500 руб.

Решение:

1. Максимальная выручка достигается, когда эластичность равна –1. Так что можно даже не вычислять функцию спроса. $\varepsilon(p) = -0{,}5-0{,}25p = -1$,

   ***p* = 2 тыс. руб.**

2. $\varepsilon(p) = q'(p)\dfrac{p}{q(p)} = -0{,}5-0{,}25p$, $\dfrac{q'(p)}{q(p)} = -\dfrac{0{,}5}{p}-0{,}25$,

   $$q(p) = ae^{\int(-0{,}5/p-0{,}25)dp} = ae^{-0{,}5\ln p-0{,}25p} = \frac{a}{\sqrt{p}}e^{-0{,}25p}.$$

Поскольку при p = 4 тыс. руб. на концерт придет q = 5 тыс. чел., найдем коэффициент a, конкретизирующий найденный в общем виде спрос:

$$\frac{a}{\sqrt{4}} e^{-0,25\times 4} = 5, \quad ae^{-1} = 5 \cdot 2 = 10, \quad a = 10e, \quad q = \frac{10}{\sqrt{p}} e^{1-0,25p}.$$

3. Максимальная выручка достигается при цене 2 тыс. руб. Подсчитаем ее:

$$TR_{\max} = pq = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} e^{1-0,25\cdot 2} = 2 \cdot 11,66 = 23,32 < 25 \text{ млн руб.}$$

Следовательно, **без спонсоров концертному агентству не обойтись**.

4. Оценим с помощью функции спроса количество зрителей, которые придут на концерт при цене билета 2,5 тыс. руб.

$$q = \frac{10}{\sqrt{2,5}} e^{1-0,25\cdot 2,5} = 9,2 < 10 \text{ тыс. зрителей.}$$

Следовательно, **концертной арены на 10 тыс. зрителей достаточно**.

3. ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

Задача 3.1

Школьник Дима получил от родителей 300 руб., которые планирует полностью потратить на мороженое ценой 15 руб., покупку компакт-дисков ценой 120 руб. и выходы в кино ценой 180 руб. Указать все возможные способы распределения имеющихся финансов.

Решение:

Возможными являются **следующие 5 вариантов:**

1. Кино (180) + CD (120).
2. Кино (180) + 8·мороженое (15).
3. 2·CD (120) + 4·мороженое (15).
4. CD (120) + 12·мороженое (15).
5. 20·мороженое (15).

Задача 3.2

В таблице указаны цены и предельные полезности от приобретения каждой единицы четырех видов блага: похода в ночной клуб, покупки книги, просмотра фильма в кинотеатре и покупки компакт-диска. Найти оптимальный набор для потребителя, выделяющего на эти четыре блага 1000 руб. Подсчитать полезность этого набора.

	Клуб, 300 руб.	**Книга, 150 руб.**	**Кино, 100 руб.**	**CD, 75 руб.**
1	210	180	150	90
2	180	150	100	60
3	90	120	90	60
4	75	105	80	45
5	60	90	70	45

Решение:

Найдем предельные полезности на 1 руб., разделив указанные в таблице предельные полезности от приобретения каждой единицы блага на соответствующие цены. Результаты сведем в таблице.

	Клуб, 300 руб.	**Книга, 150 руб.**	**Кино, 100 руб.**	**CD, 75 руб.**
1	0,7	**1,2**	**1,5**	**1,2**
2	0,6	**1**	**1**	**0,8**
3	0,3	**0,8**	**0,9**	0,8
4	0,25	0,7	**0,8**	0,6
5	0,2	0,6	0,7	0,6

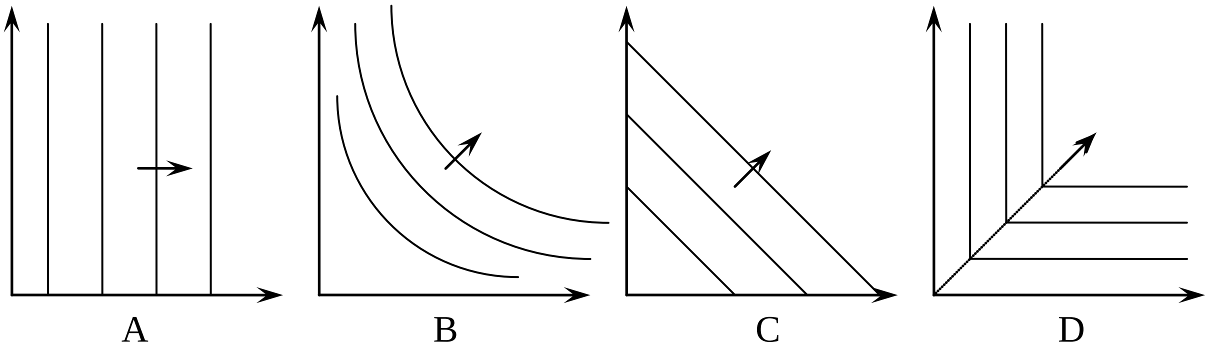
Предельные полезности на рубль по всем товарам в точке оптимума должны совпадать. При ограничении в 1000 руб. потребитель приобретает блага с предельной полезностью $MU_i / p_i \geq 0{,}8$. Таким образом, он купит **3 книги, 2 компакт-диска и 4 раза сходит в кино**. Суммарная полезность составит $TU = 180 + 150 + 120 + 150 + 100 + 90 + 80 + 90 + 60 = \mathbf{1020}$.

Задача 3.3

На графиках изображены кривые безразличия мальчика Коли для следующих пар товаров:

1. «Пепси-кола» и «Кока-кола», если Коля не чувствует разницу между ними.
2. Плюшки и сок, если Коля любит и то, и другое.
3. Лыжи и крепления, если Коля любит ходить на лыжах, причем в компании.
4. Компьютерные игрушки и куклы, если Коля равнодушен к куклам.

Поставить каждому набору товаров в соответствие один из графиков. Ответ объяснить.



Ответы:

1. C, совершенные товары-заменители, кривые безразличия – прямые.
2. B, независимые товары, стандартный вид кривых безразличия.
3. D, совершенные дополняющие товары. Например, если у Коли есть только одна пара лыж, то любое количество пар креплений, превышающее 1, не добавит ему полезности – он вынужден будет пойти один.
4. A, куклы, расположенные по оси ординат, – безразличное благо. В то же время увеличение числа компьютерных игрушек повышает полезность набора.

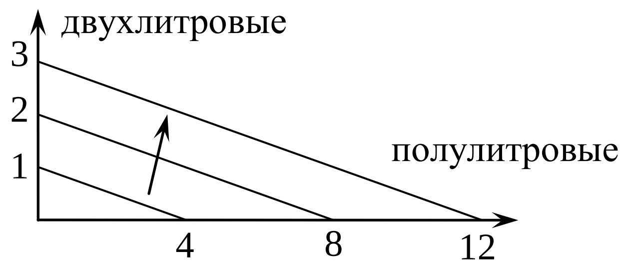
Задача 3.4*

Нарисуйте индивидуальные кривые безразличия для двух товаров для следующих ситуаций:

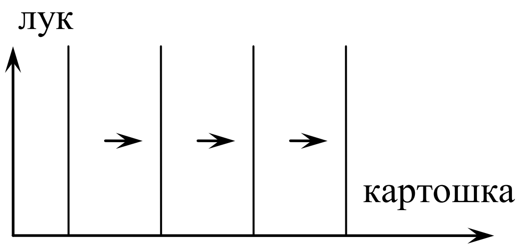
1. Маша очень любит «Фанту», но ей абсолютно все равно, из каких бутылок ее пить, из полулитровых или двухлитровых.
2. Саша обожает жареную картошку, совершенно независимо от того, с каким количеством лука она поджарена.
3. Антон желает поговорить со своим другом Андреем, но не выносит табачного дыма. Хотя ради лишнего получаса беседы он готов вытерпеть одну выкуренную Андреем сигарету.
4. Аня привыкла пить утром одну чашку кофе с двумя ложками сахара, и очень не любит любых отклонений от привычного распорядка. Чем больше эти отклонения, тем хуже.

Решение:

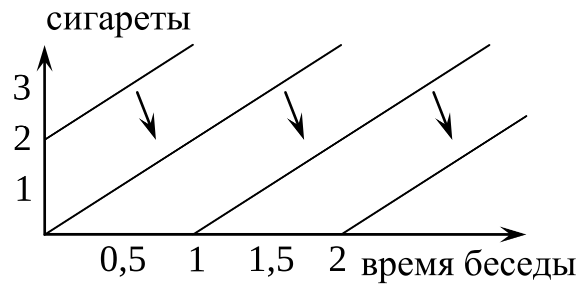
Изобразим кривые безразличия на графиках. Стрелками показано направление увеличения полезности.



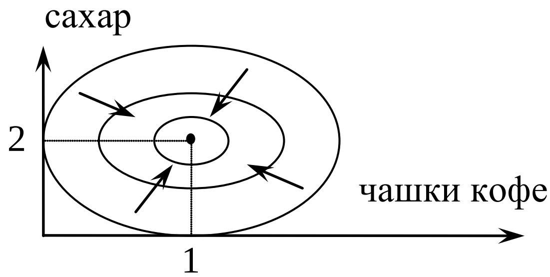
1. Совершенные заменители



2. Безразличное благо *x*



3. Благо *x* и антиблаго *y*



4. Насыщаемые предпочтения

Задача 3.5

Соотнести указанные пары товаров с описывающими их функциями полезности. x – объем покупок первого из представленных товаров, y – объем покупок второго из представленных товаров. Ответ объяснить.

Молоко и подсолнечное масло	$U = x + y$
Йогурты двух производителей: «Чудо» и «Причуда»	$U = \min\{x; y\}$
Спички и общественный транспорт	$U = xy^{100}$
Правые и левые ботинки, продающиеся раздельно	$U = x^5y$

Решение:

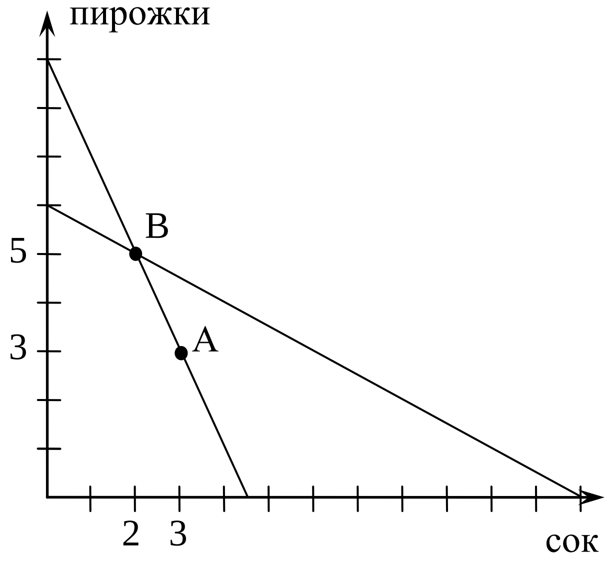
1. **Молоко и подсолнечное масло** – независимые товары, потребление которых описывается функцией полезности Кобба-Дугласа. При этом расходы репрезентативного потребителя на молоко существенно превосходят расходы на подсолнечное масло, что выражается в более высокой степени переменной x (отношение степеней характеризует отношение расходов потребителя на каждый из товаров): $\boldsymbol{U = x^5y}$.
2. **Йогурты двух производителей** – это совершенные заменители, потребление которых описывается линейной функцией полезности (для потребителя важно лишь суммарное количество потребляемых товаров): $\boldsymbol{U = x + y}$.
3. **Спички и общественный транспорт** – независимые товары, при этом расходы на второй существенно больше расходов на первый. В функции полезности Кобба – Дугласа существенно большая степень будет стоять при переменной y: $\boldsymbol{U = xy^{100}}$.
4. **Правые и левые ботинки, продающиеся раздельно**, представляют собой пример совершенных дополняющих товаров, потребление которых описывается функцией Леонтьева (полезность равна количеству полных пар ботинок): $\boldsymbol{U = \min\{x; y\}}$.

Задача 3.6

Мама дает Пете 90 руб. в неделю, которые тот тратит на сок и пирожки. Ведя себя рационально, Петя покупает за неделю 3 упаковки сока по 20 руб. и 3 пирожка по 10 руб. На следующий год мама стала давать Пете 120 руб. в неделю. При этом изменились цены на продукты: сок подешевел до 10 руб. за бутылку, а пирожки стали стоить 20 руб. Петя стал покупать 2 упаковки сока и 5 пирожков в неделю. Можно ли сделать выводы о его рациональном или нерациональном поведении? Объясните.

Решение:

На графике изображены бюджетные ограничения для первой и второй ситуации. Набор A(3;3) для Пети предпочтительнее, чем B(2;5), поскольку в ситуации 1, где доступны оба набора, Петя, ведя себя рационально, выбирает A. Во второй ситуации оба набора по-прежнему доступны, следовательно, B не может быть рациональным выбором, так как имеется, как минимум, лучший выбор A.



Таким образом, **поведение Пети нерационально.**

Задача 3.7*

Компания, предоставляющая услуги связи, предлагает населению три тарифа: повременной, при котором 1 мин разговора стоит 2 руб., комбинированный с абонентской платой 425 руб., в которую входит 200 бесплатных мин разговора, а каждая последующая мин обходится в 1,5 руб. и безлимитный тариф, обходящийся клиенту в 800 руб. в месяц. При каком месячном объеме разговоров клиент выберет каждый из тарифов? Что изменится, если абонентская плата по комбинированному тарифу снизится до 350 руб.?

Решение:

Пускай клиент разговаривает x мин в месяц. Тогда по повременному тарифу он заплатит $2x$ руб.; по комбинированному, говоря сверх бесплатного пакета $(x-200)$ мин, заплатит $\max\{425;\ 425+1{,}5(x-200)\}$; и по безлимитному – 800 руб. При малом объеме разговоров наиболее выгодным окажется повременной, а при значительном – безлимитный. Найдем критические объемы, при которых выгодна смена тарифа:

$$2x = 425+1{,}5(x-200), \quad 2x = 125+1{,}5x, \quad x = 250.$$

$$425+1{,}5(x-200) = 800, \quad 125+1{,}5x = 800, \quad x = 450.$$

Значит, разговаривая **менее 250 мин**, клиент выберет повременной тариф; **более 450 мин** – безлимитный, а внутри диапазона – комбинированный. Если абонентская плата снизится до 350 руб., то граница перехода на безлимитный тариф **увеличится до 500 мин**:

$$350+1{,}5(x-200) = 800, \quad 50+1{,}5x = 800, \quad x = 500.$$

При расчете границы перехода на повременной тариф будут некоторые отличия. Если вычислить ее прежним способом, получится:

$$2x = 350+1{,}5(x-200), \quad 2x = 50+1{,}5x, \quad x = 100 < 200.$$

Следовательно, при переходе на комбинированный тариф клиент будет разговаривать меньше 200 мин и заплатит только абонентскую плату 350 руб.:

$$2x = 350, \quad x = 175.$$

Повременной тариф будет выбран при объеме разговоров **меньше 175 мин**.

Задача 3.8*

Базовый тариф компании «Гигафон» составляет 2 руб. за смс. Также компания предоставляет месячные пакеты 100 смс за 100руб., 500 смс за 250 руб., 1000 смс за 400 руб. При каком числе отправляемых смс абонент Петя выберет какой тариф?

Решение:

Найдем критические объемы отправленных смс, при которых осуществляется смена тарифа. В критических точках абоненту Пете без разницы, какой из двух соседних пакетов покупать. Заметим также, что все смс, отправленные сверх купленного пакета, оплачиваются по 2 руб.

$2x = 100,\ x = 50.$

Отправляя **свыше 50 смс**, выгодно купить пакет 100 смс за 100 руб.

$100 + 2(x-100) = 100+100,\ x = 150.$

Свыше 150 смс $\Rightarrow$ 2 пакета 100 смс за 100 руб.

$200 + 2(x-200) = 250,\ x = 225.$

Свыше 225 смс $\Rightarrow$ пакет 500 смс за 250 руб.

$250 + 2(x-500) = 250+100,\ x = 550.$

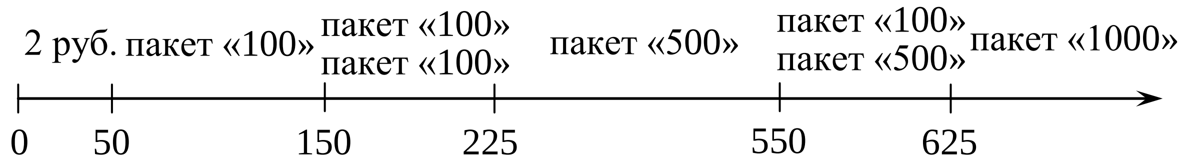
Свыше 550 смс $\Rightarrow$ пакет 500 смс за 250 руб. плюс пакет 100 смс за 100 руб.

$350 + 2(x-600) = 400,\ x = 625.$

Свыше 625 смс $\Rightarrow$ пакет 1000 смс за 400 руб.

Дальше всё повторяется с поправкой на наличие 1000 смс. Например, отправляя свыше 1050 смс, выгоден пакет «1000» плюс пакет «100».

Удобно представить всю картину на графике. Под осью указаны критические объемы отправляемых смс. Над осью – покупаемые пакеты.



Задача 3.9

Найти эквивалентные функции полезности, описывающие одинаковые предпочтения потребителей: $u_1 = 2\sqrt{x}\,y$, $u_2 = 0{,}5x + y$, $u_3 = 0{,}5\ln x + \ln y$, $u_4 = 4x^2 + 4xy + y^2$, $u_5 = 4x^2 + 4 + y^2$, $u_6 = 0{,}5x^2y$, $u_7 = x + 0{,}5y$, $u_8 = (2x)^2 + y^2$, $u_9 = 3xy^2$, $u_{10} = x + 0{,}5$. Ответ обосновать.

Решение:

С функциями полезности можно проводить любые монотонные преобразования. В частности, разрешается добавлять произвольную константу, умножать на положительное число, возводить в положительную степень, логарифмировать и брать экспоненту. Приведем все функции полезности к простейшему виду:

$$u_1 = 2\sqrt{x}\,y \ \sim\ u = x^{0,5}\,y \quad \sim \quad u = x\,y^2;$$
$$u_2 = 0{,}5x + y \quad \sim \quad u = x + 2y;$$
$$u_3 = 0{,}5\ln x + \ln y \ \sim\ u = e^{0,5\ln x + \ln y} = x^{0,5}y \ \sim\ u = x\,y^2;$$
$$u_4 = 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x+y)^2 \quad \sim \quad u = 2x + y;$$
$$u_5 = 4x^2 + 4 + y^2 \quad \sim \quad u = 4x^2 + y^2;$$
$$u_6 = 0{,}5x^2y \quad \sim \quad u = x^2y;$$
$$u_7 = x + 0{,}5y \quad \sim \quad u = 2x + y;$$
$$u_8 = (2x)^2 + y^2 = 4x^2 + y^2 \quad \sim \quad u = 4x^2 + y^2;$$
$$u_9 = 3xy^2 \quad \sim \quad u = x\,y^2;$$
$$u_{10} = x + 0{,}5 \quad \sim \quad u = x.$$

Таким образом, получаем следующие группы эквивалентных функций полезности: $u_1 \sim u_3 \sim u_9$; $u_4 \sim u_7$; $u_5 \sim u_8$.

Задача 3.10

«Пепси-кола» продается в магазине в полулитровых бутылках ценой 24 руб., литровых – ценой 40 руб. и двухлитровых – ценой 60 руб. Сколько и каких бутылок будет покупать в месяц школьник Сережа, если он готов потратить на «Пепси-колу» 240 руб. и на эти деньги он хочет получить максимальное количество напитка?

Решение:

В полулитровых бутылках литр «Пепси-колы» стоит 24/0,5 = 48 руб., в литровых – 40 руб., а в двухлитровых – 60/2 = 30 руб. Школьник Сережа должен покупать «Пепси-колу» наиболее дешево – **в двухлитровых бутылках**, которых сможет приобрести **4 шт**.

Задача 3.11

На два товара – шоколад ($p_x = 30$ руб.) и пирожные ($p_y = 20$ руб.) Марина тратит в месяц 420 руб. Построить графически множество потребительских возможностей и записать его в алгебраическом виде. Определить оптимальный выбор, если функция полезности Марины 1) $u = 18x + 2xy$; 2) $u = 2x^4y^3$.

Решение:

Выпишем бюджетное ограничение в алгебраической форме: $30x + 20y \le 420$.

При этом в точке оптимума тратятся все имеющиеся деньги, поэтому данное ограничение будет выполняться в виде равенства, и можно выразить одну переменную через другую: $20y = 420 - 30x$, $y = 21 - 1{,}5x$. Подставим это выражение в первую функцию полезности:

$$u = 18x + 2x(21 - 1{,}5x) = 60x - 3x^2 \to \max,$$

$60 - 6x = 0$, $x =$ **10 шоколадок**, $y = 21 - 1{,}5 \cdot 10 =$ **6 пирожных**.

Во втором случае удобно пользоваться свойством, справедливым для функций полезности Кобба – Дугласа $u = Ax^{\alpha} y^{\beta}$: α и β – доли, в которых распределяется имеющаяся сумма. В нашей ситуации средства делятся в пропорции 4:3, т.е. 240 руб. на шоколад и 180 руб. на пирожные. Следовательно, оптимальный выбор $x = 240/30 =$ **8 шоколадок** и $y = 180/20 =$ **9 пирожных**.

Задача 3.12

На бензин (товар x) ценой 25 руб./л., оплату интернета (товар y) ценой 2 руб./Мб и билеты в кино (товар z) ценой 150 руб. потребитель тратит 6 тыс. руб./мес. Записать алгебраически его множество потребительских возможностей и найти оптимальный выбор для функции полезности $u = 5x^7y^2z \to \max$.

Решение:

На покупку x литров бензина, использование y Мб интернет-трафика и z посещений кинотеатра тратится $(25x + 2y + 150z)$ руб. По условию эта сумма не превышает 6000 руб. Для нахождения оптимального выбора нужно решить задачу

$$u = 5x^7y^2z \to \max, \quad 25x + 2y + 150z \le 6000.$$

Далее ограничение можно переписать в виде равенства, выразить одну переменную через две другие, подставить в функцию полезности и максимизировать ее по обеим переменным. Однако проще вспомнить, что показатели степеней при переменных в функции полезности Кобба – Дугласа – это доли, в которых делится потребительский бюджет. В нашем случае 6000 руб. делятся в соотношении 7:2:1, т.е. на кино тратится 600 руб., на интернет – $600 \cdot 2 = 1200$ руб. и на бензин – $600 \cdot 7 = 4200$ руб. Таким образом, оптимальный выбор – это 4200/25 = **168 л бензина**, 1200/2 = **600 Мб трафика** и 600/150 = **4 посещения кинотеатра**.

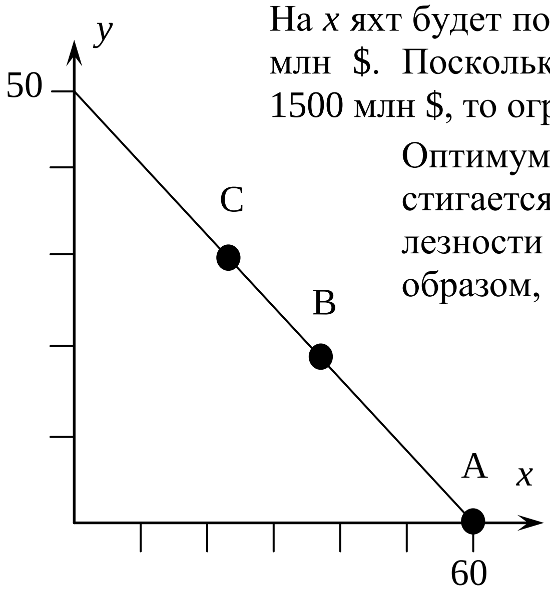
Задача 3.13

Мировое сообщество миллиардеров тратит 1,5 млрд $ в год на яхты ценой 25 млн $ и футбольные клубы ценой 30 млн $. Построить множество потребительских возможностей. Найти оптимальный выбор сообщества миллиардеров, если его функция полезности имеет вид

1) $u = x+y$; 2) $u = 0{,}1x^3y^2$; 3) $u = 5xy+y^2$.

Решение:

Если все деньги сообщество миллиардеров будет тратить на яхты (товар x), их можно купить в количестве 1500/25 = **60 шт**. Клубов (товар y) при таком же раскладе можно купить 1500/30 = **50 шт**. Изобразим его на графике.



На x яхт будет потрачено ($25x$) млн $, а на y клубов – ($30y$) млн $. Поскольку общие траты не должны превышать 1500 млн $, то ограничение примет вид $25x + 30y \le 1500$.

Оптимум для линейной функции полезности достигается в одной из угловых точек. Сравним полезности $u(A) = u(60; 0) = 60 > 50 = u(0;50)$. Таким образом, выбор сообщества – **купить 60 яхт**.

Для функции полезности Кобба-Дугласа $u = 0{,}1x^3y^2$ бюджет будет делиться в соотношении 3:2, т.е. 900 млн $ на яхты и 600 млн $ на клубы. Соответственно оптимальный выбор сообщества (точка B) – купить 900/25 = **36 яхт** и 600/30 = **20 клубов**.

Для последней функции полезности придется решать задачу максимизации

$$\begin{cases} 5xy + y^2 \to \max, \\ 25x + 30y = 1500, \end{cases} \quad x = \frac{1500 - 30y}{25} = 60 - 1{,}2y,$$

$$5(60 - 1{,}2y)y + y^2 \to \max, \quad 300y - 5y^2 \to \max,$$

$$300 - 10y = 0, \quad y = 30, \quad x = 60 - 1{,}2 \cdot 30 = 24.$$

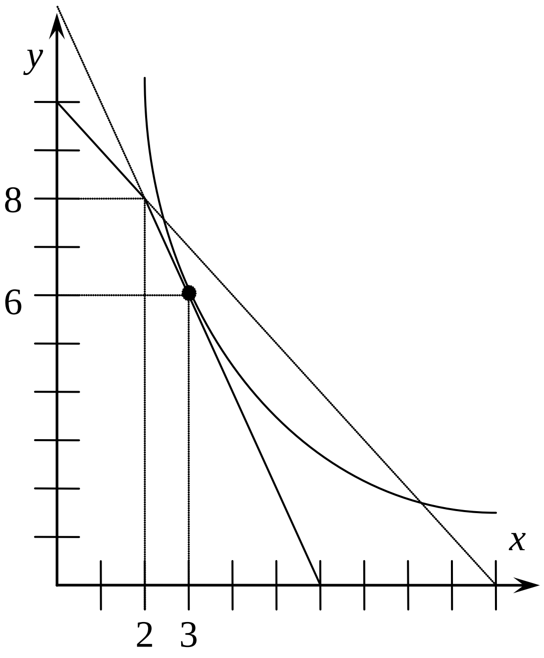
Таким образом, оптимальный выбор (точка C) достигается при покупке **24 яхт и 30 клубов**.

Задача 3.14*

Николай Павлович тратит в месяц до 200 руб. на покупку сахара и чая. Причем сахар в количестве до 2 кг он может купить у себя на работе по льготной цене 20 руб./кг. Если ему 2 кг недостаточно, он может пойти в магазин и купить там сахар по цене 40 руб./кг. Пачка чая стоит в магазине 20 руб. Изобразите на графике бюджетное ограничение Николая Павловича. Найдите для Николая Павловича оптимальный потребительский набор, если функция полезности для него имеет вид $u(x, y) = xy$, где x – потребление сахара, в кг, а y – потребление чая, в пачках.

Решение:

При $x \leq 2$ бюджетное ограничение будет выглядеть $20x + 20y \leq 200$. Если же Николай Павлович покупает больше 2 кг сахара, ситуация эквивалентна той, когда Николаю Павловичу дают дополнительно 40 руб., но весь сахар он покупает в магазине. Бюджетное ограничение следующее: $40x + 20y \leq 240$. Точка излома: $(2; 8)$.



Найдем теперь оптимальный потребительский набор. При более широком множестве покупательских возможностей $40x + 20y \leq 240$ оптимум достигается при $y = 12 - 2x$, функция полезности примет вид $xy = x(12 - 2x) \to \max$, $12 - 4x = 0$, $x^* = 3$, $y^* = 6$.

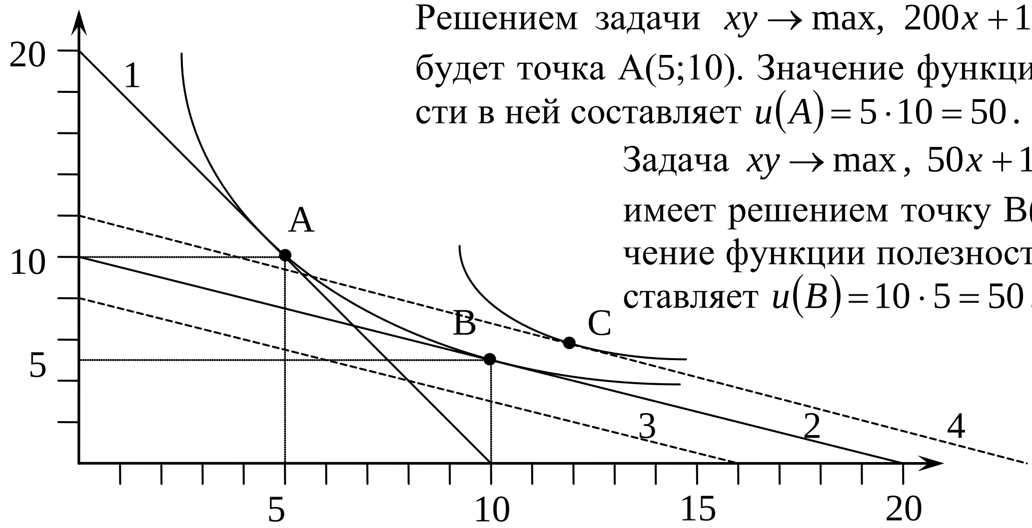
Точка (3;6) удовлетворяет условию $x \geq 2$. Таким образом, она будет решением и нашей задачи. Достигнутая Николаем Павловичем полезность: $u(3; 6) = 3 \cdot 6 = 18$.

Ответ: $x^* = 3$, $y^* = 6$, $u(3;6) = 3 \cdot 6 = 18$.

Задача 3.15*

Борис любит слушать новые компакт-диски и ходить в ночной клуб. На эти нужды он выделяет в год 2000 руб. Компакт-диск стоит 100 руб., вход в ночной клуб 200 руб. При этом у Бориса есть возможность за 1000 руб. купить клубную карту, позволяющую ходить в клуб за 50 руб. Нарисовать множество покупательских возможностей Бориса. Определить его оптимальный потребительский набор, если задана функция полезности $u = xy$, где x – число посещений ночного клуба, а y – число купленных компакт-дисков. Что произойдет с оптимальным набором и полезностью Бориса, если клубная карта станет на 200 руб. дороже? На 200 руб. дешевле?

Решение:
У Бориса 2 возможности – покупать или не покупать клубную карту. Если он не покупает ее, то бюджетное ограничение выглядит $200x + 100y \le 2000$ (1). Если Борис покупает клубную карту, у него остается 1000 руб. и бюджетное ограничение принимает вид $50x + 100y \le 1000$ (2). Итоговым множеством покупательных возможностей будет объединение двух множеств, заданных указанными бюджетными ограничениями и ограничениями $x \ge 0$, $y \ge 0$.



Решением задачи $xy \to \max$, $200x + 100y = 2000$ будет точка A(5;10). Значение функции полезности в ней составляет $u(A) = 5 \cdot 10 = 50$.

Задача $xy \to \max$, $50x + 100y = 1000$ имеет решением точку B(10;5). Значение функции полезности в ней составляет $u(B) = 10 \cdot 5 = 50$.

Видим, что Борису **безразлично, покупать клубную карту или нет** – в обоих случаях он достигает одинаковой **полезности 50**.
Если клубная карта станет на 200 руб. дороже (ограничение (3)), Борис просто **не станет ее покупать, достигнув полезности 50 в точке A.** Если клубная карта станет на 200 руб. дешевле (ограничение (4)), Борис ее заведомо купит. **Оптимумом станет точка C(24;6).** Достигаемая полезность увеличится до $U(C) = 24 \cdot 6 = \mathbf{144}$.

Задача 3.16*

Сотрудник фирмы тратит на питание (завтраки, обеды и ужины общей стоимостью 600 руб.) и проживание (съем квартиры ценой 500 руб./м^2) 24 тыс. руб. в месяц. Найти оптимальный выбор сотрудника с функцией полезности $u = xy$.

Фирма, желая улучшить условия жизни сотрудника, предлагает ему три возможных варианта субсидирования:

1. Снять сотруднику квартиру вдвое большей площади и выплачивать за нее по 200 руб./м^2 в месяц.
2. Доплачивать сотруднику по 200 руб./м^2 в месяц за выбранную им квартиру.
3. Доплачивать сотруднику по 7200 руб. в месяц на питание и проживание.

Какой из предложенных вариантов наиболее выгодный для сотрудника, максимизирующего свою полезность? Наиболее выгодный для фирмы?

Решение:

Без субсидирования сотрудник будет тратить на каждую статью расходов по 12 тыс. руб. (в функции полезности Кобба – Дугласа степени при переменных означают доли, в которых делится бюджет – в данном случае 1:1), которых хватит на $x = 12\,000/600 =$ **20 комплектов питания** и квартиру площадью $y = 12\,000/500 =$ **24 м²**. Полезность составляет $u_0 = 20 \cdot 24 = 480$.

При первом варианте субсидирования сотруднику снимают **квартиру площадью 48 м²**, за которую он платит по 300 руб./м². На питание у него остается сумма в $24\,000 - 48 \cdot 300 = 9\,600$ руб., которых хватит на $x = 9\,600/600 =$ **16 комплектов**. Расходы фирмы на субсидирование сотрудника окажутся равными 200·48 = **9600 руб.** Полезность составит $u_1 = 16 \cdot 48 = \mathbf{768}$.

Если дать сотруднику свободу в выборе квартиры, он распределит свои деньги пополам. На 12 тыс. руб. купит **20 комплектов питания** и на 12 – снимет (по 300 руб./м²) квартиру площадью **40 м²**, получив при этом полезность, равную $u_2 = 20 \cdot 40 = \mathbf{800}$. Расходы фирмы составят 200·40 = **8000 руб.**

Если выдать сотруднику субсидию **7200 руб.**, то имеющиеся 31 200 руб. он опять разделит пополам. На 15 600 руб. купит $x = 15\,600/600 =$ **26 комплектов питания**, на 15 600 руб. снимет квартиру площадью $y = 15\,600/500 =$ **31,2 м²** и получит полезность $u_3 = 26 \cdot 31{,}2 = \mathbf{811{,}2}$.

Видим, что полезность сотрудника увеличивается, а расходы фирмы уменьшаются от первого к третьему варианту субсидирования. Субсидирование деньгами является наилучшим со всех точек зрения.

Задача 3.17*

На бассейн и в танцевальную студию с ценами одного занятия 200 и 150 руб. соответственно Екатерина тратит 1800 руб. в месяц. Найти оптимальный выбор, если ее функция полезности имеет вид $u = 0{,}5xy^2$. Будет ли она готова приобрести за 1200 руб. абонемент, дающий право десятикратного посещения бассейна? Десятикратного посещения танцевальной студии?

Решение:

Удобно использовать свойство, справедливое для функций полезности Кобба – Дугласа $u = Ax^{\alpha}y^{\beta}$: α и β – доли, в которых распределяется имеющаяся сумма. Таким образом, Екатерина будет тратить на танцы вдвое больше денег: 1200 руб. против 600 на бассейн. Следовательно, оптимальный набор будет содержать 600/200 = **3 посещения бассейна** и 1200/150 = **8 посещений танцев**.

При покупке абонемента на десятикратное посещение бассейна у Екатерины останется 1800 – 1200 = 600 руб. на посещение 600/150 = **4 занятий в танцевальной студии**. При покупке танцевального абонемента на посещение бассейна останется 600 руб., что составляет **3 занятия**. Сравним полезности всех вариантов.

Исходный выбор: $u(A) = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 8^2 = 96$.

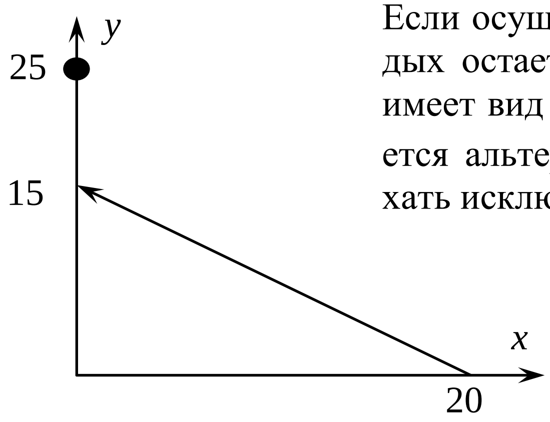
Абонемент в бассейн: $u(B) = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 4^2 = 80 < 96$. **Покупать не готова!**

Танцевальный абонемент: $u(C) = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 10^2 = 150 > 96$. **Покупать готова!**

Задача 3.18*

Три иркутянина планируют летний отпуск, выделив на него по 25 тыс. руб. Они рассматривают две альтернативы: полететь в Китай, где день отдыха обходится в $p_x = 750$ руб., а дорога в 10 тыс. руб., или отдыхать на Байкале по $p_y = 1000$ руб. в день. Построить множество потребительских возможностей. Найти оптимальный выбор каждого из отпускников, если их функции полезности имеют вид 1. $u_1 = x + y$. 2. $u_2 = x^3 y^2$. 3. $u_3 = (x+4)y$. Здесь x – число дней, проведенных в Китае, а y – число дней на Байкале.

Решение:



Если осуществляется полет в Китай, то на сам отдых остается 25 – 10 = 15 тыс.руб. Ограничение имеет вид $750x + 1000y \le 15000$. Кроме того, имеется альтернатива сэкономить на дороге и отдыхать исключительно на Байкале в течение 25 дней.

1. Если максимизировать суммарное число дней отдыха, то выбор между крайними альтернативами: 20 дней в Китае или **25 дней на Байкале** решается в пользу Байкала.
2. Поскольку отсутствие в наборе одного из видов отдыха означает нулевую полезность такого набора, полет в Китай будет осуществлен. Функция полезности $u_2 = x^3 y^2$ означает дележ оставшихся после оплаты дороги 15 тыс. руб. в соотношении 3:2, т.е. 9 тыс. руб. на **12 дней в Китае** и 6 тыс. руб. на **6 дней на Байкале**.
3. Для функции полезности $u_3 = (x+4)y$ необходимо сравнить 25-дневный отдых на Байкале $u_3(0;25) = (0+4)\cdot 25 = 100$ и решение следующей задачи оптимизации:

$$\begin{cases} (x+4)y \to \max, \\ 750x + 1000y = 15000, \end{cases}$$

$$y = 15 - 0{,}75x, \quad (x+4)(15 - 0{,}75x) = 12x - 0{,}75x^2 + 60 \to \max,$$

$$12 - 1{,}5x = 0, \quad x = 8, \quad y = 15 - 0{,}75 \cdot 8 = 9,$$

$$u_3(8;9) = (8+4)\cdot 9 = 108 > 100.$$

Таким образом, оптимальный выбор третьего иркутянина: **8 дней в Китае** и **9 дней на Байкале**.

Задача 3.19**

Студент Михаил тратит в год 7200 руб. на походы в шашлычку, где оставляет по 400 руб., и в пиццерию, где оставляет по 90 руб. за один раз. Найти оптимальный выбор, если функция полезности имеет вид $u = xy$, где x и y – соответственно количество посещений шашлычки и пиццерии. Какую максимальную цену он готов заплатить за действующую в течение года дисконтную карту, дающую скидку в шашлычке в размере 19%?

Решение:

При решении задачи удобно пользоваться свойством, справедливым для функций полезности Кобба – Дугласа $u = Ax^{\alpha} y^{\beta}$: α и β – доли, в которых распределяется имеющаяся сумма. В нашей ситуации средства делятся в пропорции 1:1, т.е. по 3600 руб. на шашлычку и пиццерию. Следовательно, оптимальный выбор $x = 3600/400 =$ **9 походов в шашлычку** и $y = 3600/90 =$ **40 посещений пиццерии**.

При покупке за z руб. дисконтной карты (после чего у Михаила остается $(7200 - z)$ руб., которые по-прежнему делятся пополам, по $(7200 - z)/2$ руб. на каждое из двух благ), стоимость похода в шашлычку снижается до 324 руб. Таким образом, количество посещений шашлычки составит $(7200 - z)/2/324$ раз, а количество посещений пиццерии – $(7200 - z)/2/90$ раз. При этом полезность данного набора должна оставаться прежней, т.е. равной 9·40=360:

$$\frac{7200 - z}{2 \cdot 324} \cdot \frac{7200 - z}{2 \cdot 90} = 360,$$

$$(7200 - z)^2 = 360 \cdot 2 \cdot 324 \cdot 2 \cdot 90 = 6480^2,$$

$$7200 - z = 6480, \quad z = 720,$$

$$x = (7200 - 720)/2/324 = 10, \quad y = (7200 - 720)/2/90 = 36.$$

Таким образом, максимальная сумма, которую готов заплатить Михаил за дисконтную карту, составляет **720 руб.** При этом он станет посещать **шашлычку 10 раз в год**, а **пиццерию 36 раз в год**.

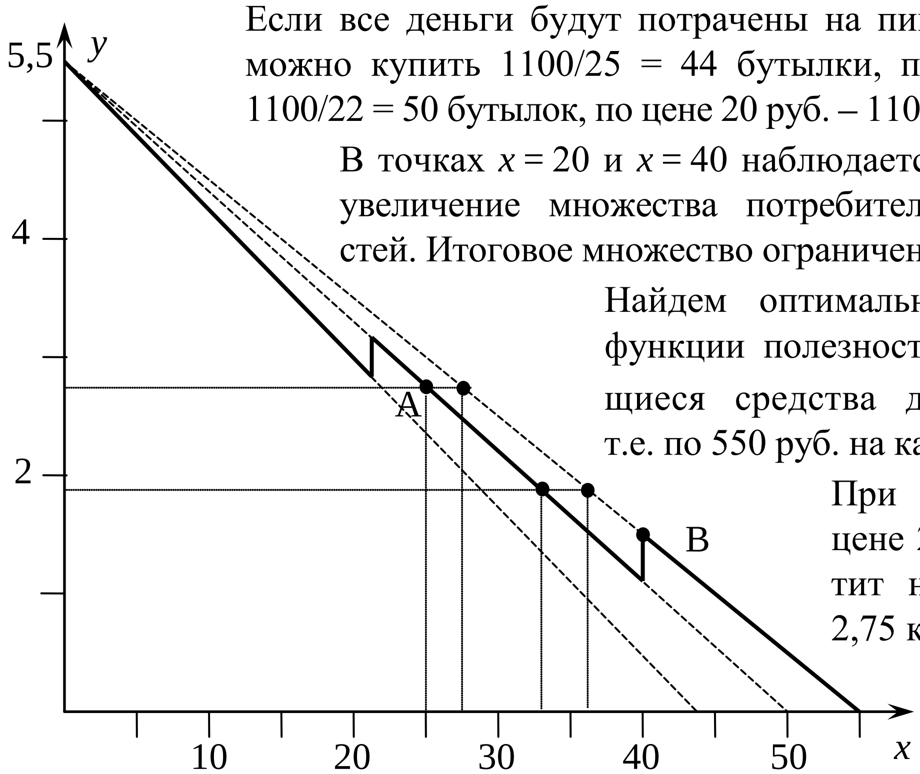
Задача 3.20**

Компания, собираясь на шашлыки, планирует потратить на пиво (товар x) и мясо (товар y) не более 1100 руб. Мясо стоит 200 руб./кг. Цена пива составляет 25 руб. при покупке до 20 бутылок, 22 руб. – при покупке 20 и более бутылок, 20 руб. – при покупке 40 и более бутылок. Построить множество потребительских возможностей. Найти оптимальный выбор, если функция полезности имеет вид:

1) $u = xy$; 2) $u = x^2 y$.

Решение:

Построим множество потребительских возможностей. Если все деньги будут потрачены на мясо, компания в состоянии купить 1100/200 = 5,5 кг.



Если все деньги будут потрачены на пиво ценой 25 руб., можно купить 1100/25 = 44 бутылки, по цене 22 руб. – 1100/22 = 50 бутылок, по цене 20 руб. – 1100/20 = 55 бутылок.

В точках $x = 20$ и $x = 40$ наблюдается скачкообразное увеличение множества потребительских возможностей. Итоговое множество ограничено жирной линией.

Найдем оптимальный выбор. Для функции полезности $u = xy$ имеющиеся средства делятся пополам, т.е. по 550 руб. на каждый из товаров.

При покупке пива по цене 22 руб. денег хватит на 25 бутылок и 2,75 кг мяса (точка А).

Проверим, нельзя ли увеличить полезность, покупая пиво по 20 руб. В этом случае денег хватает на 27,5 бутылок (следует отметить, что в экономике, как правило, не боятся дробных значений – в данном контексте это может быть проинтерпретировано как средний объем покупки при повторяющихся поездках), однако минимальный объем покупки при такой цене 40 бутылок. Мяса можно купить на 1100 – 40·20 = 300 руб., т.е. 300/200 = 1,5 кг (точка В).

$$u(A) = 25 \cdot 2{,}75 = 68{,}75 > 60 = 40 \cdot 1{,}5 = u(B),$$

поэтому оптимальным выбором будет все-таки точка **А (25; 2,75)**.

Для функции полезности $u = x^2 y$ средства делятся в соотношении 2:1, т.е. примерно 733 руб. на пиво и 367 руб. на мясо. При покупке пива по 22 руб. можно купить $33\frac{1}{3}$ бутылки и 1,83 кг мяса. Полезность при этом составит 2037.

Если пиво покупается по 20 руб., денег хватит на 733/20 = 36,7 бутылок. Минимальный объем покупок составляет 40 бутылок, так что ближайшей допустимой точкой снова будет точка В, полезность в которой

$$u(B) = 40^2 \cdot 1{,}5 = 2400 > 2037.$$

Таким образом, для случая второй функции полезности оптимальным выбором будет точка **В (40; 1,5)**.

4. ТЕОРИЯ ФИРМЫ

Задача 4.1

9 бригад рабочих за 9 дней отремонтировали 9 км дороги. Сколько километров дороги 6 бригад отремонтируют за 6 дней? Ответ пояснить.

Решение:

В новой ситуации число рабочих сокращается в 1,5 раза (6 бригад вместо 9). Также в 1,5 раза (с 9 дней до 6) сокращается время работ. Следовательно, **6 бригад за 6 дней отремонтируют 9/1,5/1,5 = 4 км дороги**.

Задача 4.2

При увеличении объемов производства на 100% суммарные издержки фирмы увеличились на 50%. Как изменилась себестоимость единицы продукции?

Решение:

Себестоимость единицы продукции равняется отношению суммарных издержек к объему производства. Суммарные издержки выросли в 1,5 раза, а объем производства в 2 раза. Следовательно, себестоимость составила $1{,}5/2 = 0{,}75 = 75\%$ от прежнего уровня, т.е. **сократилась на 25%**.

Задача 4.3

Постоянные издержки фирмы составляют 5 млн руб., а средние переменные издержки при выпуске 8 тыс. единиц продукции – 250 руб. Найти суммарные издержки.

Решение:

Переменные издержки будут равны 250 руб.$\cdot$8 тыс. = 2 млн руб. Следовательно, суммарные издержки составят $5+2$ = **7 млн руб.**

Задача 4.4

Средняя зарплата в малой фирме, где работало 4 чел., составляла 30 тыс. руб. Как она изменилась, если фирма наняла еще одного чел. с зарплатой 20 тыс. руб.

Решение:

Суммарные затраты на оплату труда в новой ситуации равны $4 \cdot 30 + 20 = 140$ тыс.руб. В среднем на одного чел. это составляет $140/5 =$ **28 тыс.руб.**

Задача 4.5

В фирме «Надувательство», по надуванию воздушных шариков работают 3 чел., причем каждый надувает в среднем 198 шариков в день. После того, как фирма наняла еще одного работника, общее количество надуваемых шариков возросло на 66. Что произошло со средней производительностью труда?

Решение:

Поскольку предельный продукт труда (66 дополнительных шариков) меньше среднего продукта труда (198 шариков), то **средняя производительность труда понижается.**

Задача 4.6

Фирма «Перпетум мебели» уволила 30% работников, а оставшимся подняла зарплату на 30%. При этом объем производства мебели вырос на 40%.

1. Как изменилась средняя производительность труда?
2. Что произошло с затратами фирмы на оплату труда? Зарплату считать одинаковой для всех работников.

Решение:

1. Производство выросло на 40%, т.е. $q_2 = 1{,}4q_1$.
   Число работников сократилось на 30%, т.е. $L_2 = 0{,}7L_1$
   Производительность труда стала равной $q_2/L_2 = 1{,}4q_1/0{,}7L_1 = 2\,q_1/L_1$, т.е. **выросла в 2 раза.**
2. Зарплата каждого работника увеличилась на 30%, т.е. $w_2 = 1{,}3w_1$.
   Затраты фирмы на оплату труда стали равны $L_2 w_2 = 0{,}7L_1 \cdot 1{,}3w_1 = 0{,}91L_1 w_1$, т.е. **сократились на 9%.**

Задача 4.7

Фирма «Стаханов и Ко», получив заказ, декларировала среднюю производительность труда на уровне 10 изделий в день. Однако после выполнения половины заказа оказалось, что каждый рабочий производил только 5 изделий в день. Какой должна быть производительность труда в оставшееся время, чтобы нормативы оказались выполненными?

Решение:

Поскольку каждый рабочий производил деталей вдвое меньше нормы, на первую половину заказа было потрачено времени вдвое больше запланированного, т.е. ровно столько, сколько отводилось на весь заказ. Таким образом, вторая половина заказа должна быть выполнена за нулевое время (**с бесконечно большой производительностью труда**), что, разумеется, **невозможно**.

Задача 4.8

Средняя производительность труда трех мастеров в парикмахерской составляла 20 клиентов в день. После найма четвертого мастера средняя производительность труда уменьшилась до 15 клиентов. Какова предельная производительность труда четвертого мастера? Выгоден ли его найм парикмахерской, если доля зарплаты в издержках парикмахерской составляла 40%? А в случае 10%?

Решение:

Поскольку $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 60$, то как в исходной, так и в новой ситуации, парикмахерская обслуживала 60 клиентов. Предельная производительность четвертого мастера **равна нулю**. Следовательно, его **найм не выгоден** парикмахерской **ни при каких положительных зарплатах**.

Задача 4.9

В прошлом году доля постоянных издержек предприятия в суммарных издержках составляла 25 %. В текущем году средние переменные издержки увеличились на 20 %, а средние суммарные издержки выросли на 10 %. Как и на сколько процентов изменились за год средние постоянные издержки?

Решение:

Суммарные издержки складываются из постоянных и переменных. Поскольку доля постоянных была равна 25 %, переменные издержки в прошлом году составляли 75 %. Ровно такое же соотношение было и в расчете на единицу продукции. Пусть средние суммарные издержки равнялись $ATC_1 = x$. Тогда средние постоянные и средние переменные издержки составляли соответственно $AFC_1 = 0{,}25x$ и $AVC_1 = 0{,}75x$. В текущем году средние переменные издержки выросли на 20 %: $AVC_2 = 1{,}2 \cdot 0{,}75x = 0{,}9x$. Средние суммарные издержки выросли на 10 %: $ATC_2 = 1{,}1x$. Можно найти, как изменились за год средние постоянные издержки:

$$ATC_2 = AFC_2 + AVC_2, \quad 1{,}1x = AFC_2 + 0{,}9x, \quad AFC_2 = 0{,}2x,$$

$$AFC_2 / AFC_1 = 0{,}2x / 0{,}25x = 0{,}8.$$

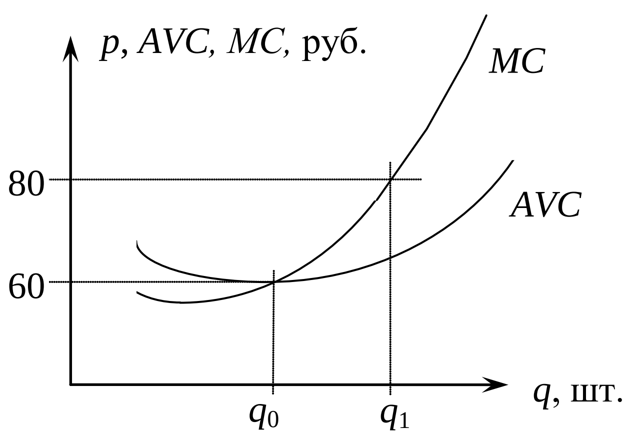
Таким образом, средние постоянные издержки **снижаются на 20 %**.

Задача 4.10

О фирме на рынке совершенной конкуренции известны следующие данные: цена производимого товара составляет 80 руб., средние переменные издержки равны 60 руб., и это служит для них минимальным значением, выпуск при этом составляет 100 тыс. шт. Какова должна быть стратегия фирмы в краткосрочном периоде – прекратить производство; сохранить объем выпуска; уменьшить выпуск или увеличить выпуск?

Решение:

Объем производства необходимо увеличивать, пока цена превосходит предельные издержки. График предельных издержек пересекает график средних переменных издержек в точке их минимума. Соответственно при текущем выпуске предельные издержки равны 60 руб. Следовательно, **выпуск увеличиваем.**



Задача 4.11

Обладает ли рыночной властью продавец, если продаваемая продукция приносит ему выручку

1. $TR = 30q$;
2. $TR = 70q - 0{,}5q^2$;
3. $(100 - T)q$ – часть выручки, остающаяся в распоряжении продавца, где T – потоварный налог?

Решение:

1. Цена $p = TR/q = 30$ не зависит от объема продаж, следовательно, продавец рыночной властью **не обладает**.
2. Цена $p = TR/q = 70 - 0{,}5q$ уменьшается с ростом объема продаж, следовательно, продавец **обладает** рыночной властью.
3. Цена $p = 100$ не зависит от объема продаж, продавец **не обладает** рыночной властью.

Задача 4.12

Типография печатает 600 альбомов с видами Байкала в месяц. Предлагается издавать на этих же производственных мощностях глянцевый журнал. Альтернативные издержки производства одного альбома равны двум журналам.

1. Определить максимально возможный тираж журнала.
2. Если тираж журнала составляет 750 экз., сколько при этом можно дополнительно напечатать альбомов?

Решение:

1. Максимально возможный тираж журнала 600·2 = **1200 экз**.
2. Если тираж журнала 750 экз., то производственных мощностей остается на 1200–750 = 450 экз., что соответствует 450/2 = **225 альбомам**.

Задача 4.13

Фермер выращивает на имеющихся у него площадях 150 т огурцов и 50 т помидоров. Альтернативные издержки выращивания 1 т огурцов составляют 0,5 т помидоров. Какое максимальное количество огурцов сможет на имеющихся площадях выращивать фермер, если пожелает увеличить производство помидоров до 80 т?

Решение:

Поскольку альтернативные издержки выращивания 1 т огурцов составляют 0,5 т помидоров, то альтернативные издержки выращивания тонны помидоров составляют $1/0{,}5 = 2$ т огурцов. Увеличение производства помидоров на 80 – 50 = 30 т приведет к сокращению производства огурцов на 30·2 = 60 т. Следовательно, их выпуск составит 150 – 60 = **90 т**.

Задача 4.14

Выручка предпринимателя за год составила 4 млн руб. Для этого ему потребовалось в начале года вложить в дело 2 млн 200 тыс. руб. Найти бухгалтерскую и экономическую прибыль предпринимателя при условии, что ему предлагали следующую альтернативу: сдать производственные помещения в аренду за 500 тыс. руб. в год и наняться на работу с зарплатой в 50 тыс. руб./мес. Налог на прибыль 20 %. Процентные ставки по кредиту и депозиту 20 % и 10 % соответственно. Собственные средства предпринимателя на начало года составляли 700 тыс. руб.

Решение:

Прибыль к налогообложению составит $4000-2200 = 1800$ тыс. руб. Налог на прибыль равен $1800 \cdot 0{,}20 = 360$ тыс. руб. Также предпринимателю необходимо взять кредит на сумму $2200 - 700 = 1500$ тыс. руб., по которому требуется выплатить $1500 \cdot 0{,}2 = 300$ тыс. руб. процентов.

Бухгалтерская прибыль равна $4000-2200-360-300 =$ **1140 тыс. руб.**

В альтернативе предприниматель мог получить 500 тыс. руб. арендной платы, $50 \cdot 12 = 600$ тыс. руб. зарплаты и $700 \cdot 0{,}1 = 70$ тыс. руб. банковского процента, т.е. $500 + 600 + 70 =$ **1170 тыс. руб. Экономическая прибыль** равна $1140-1170 =$ **–30 тыс. руб.**

Задача 4.15

Руслан проживает в Шелехове, а работает в Иркутске. При какой почасовой оплате труда ему будет экономически выгодно ездить на работу на электричке, затрачивая 20 руб. и 1 ч; на микроавтобусе (30 руб. и 40 мин.); на такси (300 руб. и 20 мин.)? Что произойдет при отмене микроавтобуса?

Решение:

Руслану экономически выгодно ездить **на электричке**, если за лишние 20 мин (1 ч вместо 40 мин на микроавтобусе) он может заработать меньше сэкономленных 10 руб. (20 руб. вместо 30). Это соответствует зарплате **меньше 30 руб./ч.**

Руслану экономически выгодно ездить **на такси**, если за сэкономленные 20 мин (20 вместо 40 на микроавтобусе) он может заработать больше потраченных дополнительно 270 руб. (300 вместо 30). Это соответствует зарплате **больше 810 руб./ч.** В диапазоне **от 30 до 810 руб./ч** он будет ездить **на микроавтобусе**.

При отмене микроавтобуса ситуация меняется. Экономически выгодно ездить **на электричке** становится в ситуации, когда за лишние 40 мин (1 ч вместо 20 мин) Руслан может заработать меньше сэкономленных 280 руб. (20 вместо 300). Это соответствует зарплате **меньше $280 \cdot 1{,}5 = 420$ руб./ч.** При зарплате **выше 420 руб./ч** Руслан пересаживается **на такси**.

Задача 4.16

Фермер может посадить картошку трех сортов. Урожайность каждого сорта зависит от погодных условий и представлена в таблице, в т/га:

	хорошие	**засуха**	**дожди**	**позд. заморозки**
сорт 1	11	10	10	0
сорт 2	9	6	7	8
сорт 3	12	6	5	6

Что можно посоветовать нейтральному по отношению к риску фермеру, если в предстоящем году наступление всех погодных условий равновероятно?

Решение:

Вычислим среднюю урожайность каждого сорта:
$M_1 = (11+10+10+0)/4 = 7{,}75$, $M_2 = (9+6+7+8)/4 = 7{,}5$, $M_3 = (12+6+5+6)/4 = 7{,}25$.
Отсюда следует, что фермеру нужно выращивать **первый сорт**, дающий среднюю урожайность 7,75 т/га.

Задача 4.17

В таблице представлена часть данных о возможных вариантах ведения бизнеса на некотором предприятии при неизменных постоянных издержках. Восстановите недостающую информацию.

		Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
Цена, руб.	p		70	50
Объем продаж, тыс. шт.	q	30	40	
Выручка, тыс. руб.	TR			
Постоянные издержки, тыс. руб.	FC			
Переменные издержки, тыс. руб.	VC		900	1200
Суммарные издержки, тыс. руб.	TC	1600	1900	
Прибыль, тыс. руб.	π	800		800

Решение:

Будем использовать формулы $TR = pq$, $TC = FC + VC$, $\pi = TR - TC$ и то, что постоянные издержки для всех трех вариантов ведения бизнеса одинаковы.
Второй столбец: $FC = 1900 - 900 = 1000$, $TR = 70 \cdot 40 = 2800$, $\pi = 2800 - 1900 = 900$.
Первый столбец: $VC = 1600 - 1000 = 600$, $TR = 1600 + 800 = 2400$, $p = 2400/30 = 80$.
Третий столбец: $TC = 1000 + 1200 = 2200$, $TR = 2200 + 800 = 3000$, $q = 3000/50 = 60$.

		Вариант 1	**Вариант 2**	**Вариант 3**
Цена, руб.	p	80	**70**	**50**
Объем продаж, тыс. шт.	q	**30**	**40**	60
Выручка, тыс. руб.	TR	2400	2800	3000
Постоянные издержки, тыс. руб.	FC	1000	1000	1000
Переменные издержки, тыс. руб.	VC	600	**900**	**1200**
Суммарные издержки, тыс. руб.	TC	**1600**	**1900**	2200
Прибыль, тыс. руб.	π	**800**	900	**800**

Задача 4.18*

Фирма действует на рынке совершенной конкуренции. Зависимость суммарных издержек от выпуска представлена в таблице:

Суточный выпуск, тыс. шт.	q	0	10	20	30	40	50	60
Суммарные издержки, тыс. руб.	TC	500	620	700	900	1240	1750	2400

На рынке установилась цена 40 руб.

1. Сколько продукции должна производить фирма, чтобы достичь максимума прибыли? Какова будет при этом прибыль?
2. Начиная с какой цены, фирма может работать с прибылью?
3. При какой цене фирме будет выгоднее прекратить производство продукции? Рассмотреть краткосрочный период.

Решение:

1. Умножив суточный выпуск на 40, получим суммарную выручку. Прибыль равна разности суммарной выручки и суммарных издержек:

Суточный выпуск, тыс. шт.	q	0	10	20	30	40	50	60
Суммарные издержки, тыс. руб.	TC	500	620	700	900	1240	1750	2400
Суммарная выручка, тыс. руб.	TR	0	400	800	1200	1600	2000	2400
Прибыль, тыс. руб.	π	–500	–220	100	300	360	250	0

Из таблицы видим, что максимальная прибыль, равная 360 тыс. руб., будет **при суточном выпуске 4 тыс. единиц продукции.**

2. Фирма работает с прибылью, если цена устанавливается выше уровня минимума средних суммарных издержек. Для их нахождения разделим суммарные издержки на выпуск.

Суточный выпуск, тыс. шт.	q	0	10	20	30	40	50	60
Средние сумм. издержки, руб.	ATC	–	62	35	30	31	35	40

Минимальное значение составляет 30 руб. Если цена устанавливается **выше 30 руб.**, фирма работает с прибылью.

3. Фирма прекращает производство продукции, если она не в состоянии покрыть даже переменные издержки, т.е. если цена устанавливается ниже минимума средних переменных издержек. Для их нахождения разделим переменные издержки на выпуск. Переменные издержки можно отыскать, отняв от суммарных издержек постоянные, равные 500 тыс. руб. (суммарным издержкам при нулевом объеме производства).

Суточный выпуск, тыс. шт.	q	0	10	20	30	40	50	60
Переменные издержки, тыс. руб.	VC	0	120	200	400	740	1250	1900
Средние перем. издержки, руб.	AVC	–	12	10	13,3	18,5	25	31,7

Минимальное значение средних переменных издержек составляет 10 руб. Если цена устанавливается **ниже 10 руб.**, фирма прекращает производство продукции.

Задача 4.19*

На рынке с линейным спросом работает монополист. В таблице приведена часть данных о возможных объемах поставок (q, тыс. шт.), ценах (p, руб.), суммарной выручке (TR, тыс. руб.) и предельной выручке (MR, руб.). Восстановите недостающую информацию.

***q*, тыс.шт.**		10	20	30		
***p*, руб.**	400				40	
***TR*, тыс.руб.**	0					0
***MR*, руб.**			160			

Решение:

При решении задачи будем использовать формулы $TR = pq$, $MR = \Delta TR / \Delta q$, а также информацию о том, что цена линейно падает с ростом поставок.

В первом столбце объем поставок нулевой: $q = 0/400 = 0$.

Пусть цены во втором и третьем столбце равны соответственно p_2 и p_3. Тогда, учитывая линейность спроса, $p_2 - 400 = p_3 - p_2$, т.е. $p_3 = 2p_2 - 400$. Кроме того, $TR_2 = 10p_2$, $TR_3 = 20p_3$, $MR_3 = (20p_3 - 10p_2)/10 = 160$, т.е. $2p_3 - p_2 = 160$.

Осуществим подстановку: $2(2p_2 - 400) - p_2 = 160$, $4p_2 - 800 - p_2 = 160$, $3p_2 = 960$, $p_2 = 320$, $p_3 = 2 \cdot 320 - 400 = 240$.

При повышении объемов продаж на каждую тысячу единиц продукции цена падает на (400 – 320)/10 = 8 руб.: $p = 400 - 8q$. Таким образом, при объеме продаж в $q_4 = 30$ цена составит $p_4 = 400 - 8 \cdot 30 = 160$ руб. Найдем, при каком объеме цена составит 40 руб.: $400 - 8q_5 = 40$, $q_5 = 45$. В последнем столбце выручка нулевая, следовательно, цена также обращается в ноль: $400 - 8q_6 = 0$, $q_6 = 50$.

Найдем выручку в оставшихся столбцах:

$$TR_4 = 160 \cdot 30 = 4800,\ TR_5 = 40 \cdot 45 = 1800.$$

Найдем предельную выручку. В первом столбце она не определена. Далее

$$MR_2 = \frac{3200 - 0}{10 - 0} = 320, \qquad MR_4 = \frac{4800 - 4800}{30 - 20} = 0,$$

$$MR_5 = \frac{1800 - 4800}{45 - 30} = -200, \qquad MR_6 = \frac{0 - 1800}{50 - 45} = -360.$$

Итоговая таблица примет следующий вид:

***q*, тыс.шт.**	0	**10**	**20**	**30**	45	50
***p*, руб.**	**400**	320	240	160	**40**	0
***TR*, тыс.руб.**	**0**	3200	4800	4800	1800	**0**
***MR*, руб.**	–	320	**160**	0	–200	–360

Задача 4.20*

Доступна часть данных об издержках кафе быстрого питания в зависимости от среднемесячного числа клиентов. Восстановить остальные данные. При каком среднем чеке клиента деятельность кафе может быть прибыльной?

Число клиентов, *q*, тыс. чел.	0		10	15	20	25	
Постоянные издержки, *FC*, тыс. руб.							
Переменные издержки, *VC*, тыс. руб.				600			
Суммарные издержки, *TC*, руб.							4200
Средние пост. издержки, *AFC*, руб.		75	60				
Средние перем. издержки, *AVC*, руб.							72
Средние сумм. издержки, *ATC*, руб.						76	
Предельные издержки, *MC*, руб.			30	44		84	

Решение:

В процессе решения будем использовать формулы: $TC = FC + VC$, $AFC = FC/q$, $AVC = VC/q$, $ATC = TC/q$, $MC = \Delta TC/\Delta q = \Delta VC/\Delta q$, а также то, что постоянные издержки не зависят от объема производства и одинаковы во всей строке.

Из третьего столбца $FC = 60 \cdot 10 = 600$. Во втором столбце $q_2 = 600/75 = 8$. По формуле предельных издержек для четвертого столбца $44 = (600 - VC_3)/(15 - 10)$, $VC_3 = 380$. Аналогично, $30 = (380 - VC_2)/(10 - 8)$, $VC_2 = 380$. Переменные издержки при отсутствии клиентов равны нулю. В шестом столбце суммарные издержки равны $TC_6 = 76 \cdot 25 = 1900$, а переменные $VC_6 = 1900 - 600 = 1300$. Предельные издержки выражаются как $84 = (1300 - VC_5)/(25 - 20)$, $VC_5 = 880$. В последнем столбце $VC_7 = 4200 - 600 = 3600$, $q_7 = 3600/72 = 50$. Далее заполним оставшиеся ячейки строки *TC*: $TC_1 = 600 + 0 = 600$, $TC_2 = 600 + 320 = 920$, $TC_3 = 600 + 380 = 980$, $TC_4 = 600 + 600 = 1200$, $TC_5 = 600 + 880 = 1480$. Средние издержки найдем делением постоянных, переменных и суммарных на число клиентов. При отсутствии клиентов они не определены. $AVC_2 = 320/8 = 40$, $ATC_2 = 920/8 = 115$ и т.д. И наконец, найдем предельные издержки:

$$MC_2 = \frac{320 - 0}{8 - 0} = 40,\quad MC_5 = \frac{880 - 600}{20 - 15} = 56,\quad MC_7 = \frac{3600 - 1300}{50 - 25} = 92.$$

Число клиентов, *q*, тыс.чел.	**0**	8	**10**	**15**	**20**	**25**	50
Постоянные издержки, *FC*, тыс. руб.	600	600	600	600	600	600	600
Переменные издержки, *VC*, тыс. руб.	0	320	380	**600**	880	1300	3600
Суммарные издержки, *TC*, руб.	600	920	980	1200	1480	1900	**4200**
Средние пост. издержки, *AFC*, руб.	–	**75**	**60**	40	30	24	12
Средние перем. издержки, *AVC*, руб.	–	40	38	40	44	52	**72**
Средние сумм. издержки, *ATC*, руб.	–	115	98	80	74	**76**	84
Предельные издержки, *MC*, руб.	–	40	**30**	**44**	56	**84**	92

Деятельность кафе может быть прибыльной, если средний чек превышает хотя бы в какой-то точке величину средних суммарных издержек. Таким образом, **чек должен превышать 74 руб.**

Задача 4.21*

В таблице приведена часть данных об объеме производства (q), средней (AP_L) и предельной (MP_L) производительности труда в зависимости от числа работников фирмы (L). Восстановите недостающую информацию.

***L*, чел.**	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**70**	**100**
***q*, шт.**				1500				
***AP_L*, шт./чел.**		40				41		29
***MP_L*, шт./чел.**			60			25	20	

Решение:

При решении задачи будем пользоваться следующими формулами:

$$AP_L = \frac{q}{L}, \quad MP_L = \frac{\Delta q}{\Delta L}, \quad q = 0 \text{ при } L = 0.$$

При $L = 10$ $q = 40 \cdot 10 = 400$, $MP_L = (400 - 0)/(10 - 0) = 40$.

При $L = 20$ $\Delta q = 60 \cdot (20 - 10) = 600$, $q = 400 + 600 = 1000$, $AP_L = 1000/20 = 50$.

При $L = 30$ $AP_L = 1500/30 = 50$, $MP_L = (1500 - 1000)/(30 - 20) = 50$.

При $L = 50$ $q = 41 \cdot 50 = 2050$, $\Delta q = 25 \cdot (50 - 40) = 250$.

При $L = 40$ $q = 2050 - 250 = 1800$, $AP_L = \dfrac{1800}{40} = 45$, $MP_L = \dfrac{1800 - 1500}{40 - 30} = 30$.

При $L = 70$ $\Delta q = 20 \cdot (70 - 50) = 400$, $q = 2050 + 400 = 2450$, $AP_L = 2450/70 = 35$.

При $L = 100$ $q = 29 \cdot 100 = 2900$, $MP_L = (2900 - 2450)/(100 - 70) = 15$.

***L*, чел.**	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**70**	**100**
***q*, шт.**	0	400	1000	**1500**	1800	2050	2450	2900
***AP_L*, шт./чел.**	–	**40**	50	50	45	**41**	35	**29**
***MP_L*, шт./чел.**	–	40	**60**	50	30	**25**	**20**	15

Задача 4.22*

Месячный спрос на авиабилеты Иркутск – Москва – Иркутск задан функцией $p = 840/(q+5)$. Здесь, p – цена, тыс.руб., q – число проданных билетов, тыс. шт. Максимально возможное число обслуживаемых пассажиров составляет 50 тыс. чел. Суммарные издержки авиакомпании в зависимости от числа проданных билетов представлены в таблице:

***q*, тыс. чел.**	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
***TC*, млн руб.**	400	435	455	475	490	500	540	595	680	810	950

1. Найти оптимальную цену, которую должна установить авиакомпания, соответствующий объем продаж и получаемые прибыли.
2. Если рынок авиаперевозок станет конкурентным, при каких сложившихся на нем ценах авиакомпания будет получать прибыль?
3. До какого уровня авиакомпания имеет возможность снижать цены в случае проведения распродажи, чтобы покрывать хотя бы переменные издержки?

Решение:

1. Для нахождения оптимальной цены вычислим прибыль авиакомпании при каждом возможном объеме продаж и определим, когда она будет максимальна. Цена находится из функции спроса $p = 840/(q+5)$. Выручка равна произведению цены и объема продаж *TR* = *pq*. Прибыль – разности выручки и суммарных издержек $\pi = TR - TC$. Сведем результаты в таблице:

***q*, тыс.шт.**	***p*, тыс.руб.**	***TR*, млн руб.**	***TC*, млн руб.**	**π, млн руб.**	***ATC*, тыс.руб.**	***VC*, млн руб.**	***AVC*, тыс.руб.**
0	168	0	400	–400		0	
5	84	420	435	–15	87	35	7
10	56	560	455	105	45,5	55	5,5
15	42	630	475	155	31,67	75	5
20	33,6	672	490	182	24,5	90	4,5
25	28	700	500	**200**	20	100	**4**
30	24	720	540	180	18	140	4,67
35	21	735	595	140	**17**	195	5,57
40	18,67	746,67	680	66,67	**17**	280	7
45	16,8	756	810	–54	18	410	9,11
50	15,27	763,64	950	–186,36	19	550	11

   Видим, что оптимальная цена составляет **28 тыс. руб.** При этом продается **25 тыс. авиабилетов**, а авиакомпания получает прибыль в размере **200 млн руб.**

2. Фирма получает прибыль, когда цена превышает средние суммарные издержки, вычисляемые по формуле *ATC* = *TC*/*q*. Из таблицы видно, что минимальное значение средних суммарных издержек равно **17 тыс. руб.** При ценах выше этого уровня авиакомпания будет получать прибыль.
3. Авиакомпания покрывает переменные издержки, когда цена устанавливается выше уровня *AVC* = *VC*/*q*. Чтобы найти переменные издержки, нужно из суммарных вычесть постоянные: *VC* = *TC* – *FC*. Постоянные издержки равны суммарным при нулевом объеме производства, т.е. *FC* = 400. Осуществив вычисления, найдем, что минимум средних издержек составляет **4 тыс. руб.** Именно до этого уровня есть возможность снижать цены в случае проведения распродажи.

Задача 4.23*

Функция суммарных издержек в зависимости от объема производства *q* (тыс. шт.) имеет вид $TC(q) = q^2 + 600q + 10\,000$ (тыс. руб.). Найти, при каких ценах на продукцию фирма будет получать прибыль, при каких – нести убытки, а при какой цене вовсе уйдет с рынка. Рассмотреть краткосрочный период.

Решение:

Фирма будет получать прибыль, если цена установится выше минимума средних суммарных издержек, уйдет с рынка, если цена установится ниже минимума средних переменных издержек, и будет нести убытки, продолжая при этом производство, при промежуточных ценах.

$$ATC = TC/q = q + 600 + 10\,000/q \to \min,$$

$$1 - 10\,000/q^2 = 0,\ q = 100, \quad \min ATC = 800 \text{ руб.}$$

$$VC = q^2 + 600q,\ AVC = VC/q = q + 600 \to \min,$$

$$\min AVC = 600 \text{ руб. при } q = 0.$$

Ответ. $p > 800$ – фирма получает прибыль;

$p \in [600; 800]$ – фирма несет убытки, но продолжает производство;

$p < 600$ – фирма закрывается.

Задача 4.24

Предприниматель шьет рюкзаки себестоимостью 300 руб. Спрос на его продукцию составляет $q_D = 350 - 0{,}5p$, где q – количество, шт., а p – цена, руб. Сколько рюкзаков и по какой цене будет продавать предприниматель, чтобы получить максимальную прибыль? Какова будет эта прибыль?

Решение:

Предприниматель, устанавливая цену p, будет с каждого проданного рюкзака получать прибыль (p – 300) руб. Таких рюкзаков он продаст $q = 350 - 0{,}5p$. Суммарная прибыль, которую нужно максимизировать, равна

$$\pi = (p - 300)(350 - 0{,}5p) = -0{,}5p^2 + 500p - 105\,000 \to \max,\quad \pi' = 500 - p = 0.$$

Следовательно, цена будет равна p = **500 руб.**, объем продаж составит $q = 350 - 0{,}5 \cdot 500 =$ **100 рюкзаков**, а предприниматель получит прибыль $\pi = (500 - 300) \cdot 100 =$ **20 000 руб.**

Задача 4.25

Фирма-монополист по производству сепулек продает их на рынке со спросом $q_D = 20 - 2p$ (здесь p – цена, тыс. руб., а q – объем продаж, тыс. шт.) через единственного посредника, также максимизирующего свою прибыль. Какова будет отпускная цена производителя и розничная цена, а также объем продаж, если издержки производства составляют 2 тыс. руб. за одну сепульку?

Решение:

Пускай монополист поставляет продукцию по цене p*. Тогда эта цена определяет уровень издержек посредника. Посредник будет максимизировать свою прибыль:

$$\pi = (p - p^*)(20 - 2p) = 20p - 20p^* - 2p^2 + 2pp^* \to \max_p,\quad 20 + 2p^* - 4p = 0.$$

Розничная цена p и объем продаж q составят соответственно

$$p = (10 + p^*)/2, \quad q = 20 - 2p = 10 - p^*.$$

Монополист с учетом этого максимизирует свою функцию прибыли:

$$\pi_M = (p^* - 2)(10 - p^*) = 10p^* - 20 - (p^*)^2 + 2p^* \to \max_{p^*}, \quad 10 + 2 - 2p^* = 0.$$

Следовательно, отпускная цена производителя составит $p^* =$ **6 тыс. руб.**, розничная цена $p = (10+6)/2 =$ **8 тыс. руб.**, а объем продаж $q = 20 - 2 \cdot 8 =$ **4 тыс. шт.**

Задача 4.26*

Монополист производит продукцию с издержками $TC = q^2 + 100q + 5000$. Объем спроса связан с ценой следующим выражением: $q = 400 - p$.

1. Определите оптимальный объем производства, цену продукции и прибыль (убытки) монополиста.
2. Определите эти параметры, если государство регулирует монополию с помощью ценового барьера: нельзя продавать продукцию дороже 250 руб.
3. Что произойдет, если увеличить барьер до 350 руб.?

Решение:

1. Выручка монополиста равна объему продаж, умноженному на цену продукции. Цену найдем из уравнения спроса: $p = 400 - q$. Прибыль монополиста равна разнице между выручкой и издержками. Максимизируем ее:

$$\pi(q) = q(400 - q) - (q^2 + 100q + 5000) = 300q - 2q^2 - 5000 \to \max,$$

$$\pi'(q) = 300 - 4q = 0,$$

$$q^* = 75, \quad p^* = 400 - 75 = 325, \quad \pi(q^*) = 300 \cdot 75 - 2 \cdot 75^2 - 5000 = 6250.$$

2. Если государство установит барьер $p \le 250$ ниже монопольной цены, монополист будет вынужден продавать продукцию именно по такой цене. Найдем оптимальный объем продаж из условия максимизации прибыли:

$$\pi(q) = 250q - (q^2 + 100q + 5000) = 150q - q^2 - 5000 \to \max,$$

$$\pi'(q) = 150 - 2q = 0, \quad q^* = 75, \quad \pi(q^*) = 150 \cdot 75 - 75^2 - 5000 = 625.$$

   Следует отметить, что в этой ситуации возникнет дефицит, поскольку объем спроса при цене в 250 руб. составляет 150 единиц продукции, а монополист будет предлагать на рынок только 75.

3. Если государство увеличит барьер до 350 руб., то монополист вовсе не должен задирать цену именно до этого максимального уровня. В первом пункте мы рассчитали, что оптимальная цена монополиста в случае без ограничений составит 325 руб., а объем продаж при этом составит 75 единиц. Это решение удовлетворяет и условию с барьером $p \le 350$.

Ответ:

1. $p^* = 325$, $q^* = 75$, $\pi^* = 6250$,
2. $p^* = 250$, $q^* = 75$, $\pi^* = 625$,
3. $p^* = 325$, $q^* = 75$, $\pi^* = 6250$.

Задача 4.27*

Фирма на рынке совершенной конкуренции продает продукцию в количестве q (тыс. шт.), производя ее с суммарными издержками, равными $TC(q) = 10q^2 + 500q + 40\,000$ (тыс. руб.)

1. Найти функции постоянных и переменных издержек.
2. Найти цену закрытия фирмы.
3. Найти цену, сложившуюся на рынке, и оптимальный объем продаж фирмы, если ее максимальная прибыль составляет при этом 60 млн руб.

Решение:

1. Постоянные издержки, не зависящие от объема производства $FC = 40\,000$; переменные издержки, зависящие от объема производства $VC = 10q^2 + 500q$.
2. Цена закрытия фирмы равна минимуму средних переменных издержек: $p_{закр} = \min AVC = \min\left(10q^2 + 500q\right)/q = \min(10q + 500) =$ **500 руб.**
3. Пусть на рынке сложилась цена p. Оптимальный объем производства достигается при выполнении условия $p = MC = TC' = 20q + 500$. Прибыль при этом составит $\pi = (20q + 500)q - 10q^2 - 500q - 40\,000 = 10q^2 - 40\,000 = 60\,000$, $q^2 = 10\,000$, $q^* = 100$ тыс. шт., $p^* = 20 \cdot 100 + 500 = 2500$ руб.

   Ответ. Цена на рынке составляет **2500 руб.**, оптимальный объем продаж равен **100 тыс. шт.**

Задача 4.28*

Электричка, перевозящая ежедневно 1600 пассажиров из Ангарска в Иркутск, обходится железной дороге в (30+k) тыс. руб., где k – число вагонов в электричке. Доля пассажиров, оплачивающих стоимость проезда в 50 руб., составляет $(1 - 0{,}1\ln n)$, где n – число пассажиров в вагоне. Найти оптимальное число вагонов в электричке. Сможет ли железная дорога обойтись без дотаций?

Решение:

Число пассажиров в вагоне составит $1600/k$. Из них оплатит проезд только часть, равная $(1 - 0{,}1\ln(1600/k)) = (1 - 0{,}1\ln 1600 + 0{,}1\ln k)$. Соответственно, выручка железной дороги составит $1600 \cdot 0{,}05 \cdot (1 - 0{,}1\ln 1600 + 0{,}1\ln k)$ тыс. руб. Максимизируем прибыль:

$$\pi = 80(1 - 0{,}1\ln 1600 + 0{,}1\ln k) - (30 + k) \to \max,$$

$$8/k - 1 = 0, \quad k = 8,$$

$$\pi = 80(1 - 0{,}1\ln 200) - (30 + 8) = -0{,}387 < 0.$$

Таким образом, **оптимальным числом вагонов будет 8**, тем не менее, это не позволит железной дороге выйти в зону прибыли, **без дотаций не обойтись.**

Задача 4.29*

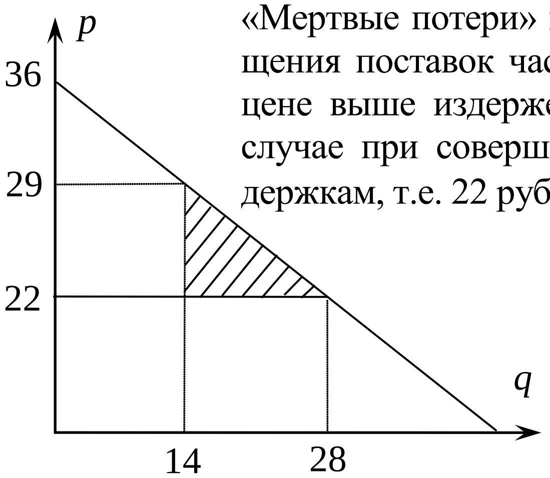
Месячный спрос на бензин в Иркутске задан функцией $q_D = 72 - 2p$. Здесь p – цена, руб./л, q – объем продаж, млн л. Компаниям он обходится в 22 руб./л, включая нормальную прибыль. Благодаря сговору, компаниям удалось установить на рынке монопольную цену. Найти сложившуюся на рынке цену и соответствующий объем продаж. Найти «мертвые потери» (потери общественного благосостояния при переходе от конкурентного рынка к монополии).

Решение:

Выпишем функцию прибыли объединения компаний и максимизируем ее:

$$\pi = TR - TC = pq - 22q = (p-22)(72-2p) = -2p^2 + 116p - 1584 \to \max .$$

Приравняв производную к нулю, найдем оптимальную цену: $-4p + 116 = 0$, $\boldsymbol{p^* = 29}$ **руб./л.** Объем продаж при этом составит $q^* = 72 - 2 \cdot 29 =$ **14 млн л.**



«Мертвые потери» монополии связаны с тем, что из-за сокращения поставок часть покупателей, готовых купить товар по цене выше издержек, не в состоянии это сделать. В нашем случае при совершенной конкуренции цена будет равна издержкам, т.е. 22 руб./л., а объем продаж 72–2·22 = 28 млн л. В случае монополии цена увеличивается до 29 руб./л, а продажи сокращаются до 14 млн л. Графически «мертвые потери» равны площади заштрихованного треугольника, а численно *DL* = (28–14)·(29–22)/2 = **49 млн руб.**

Задача 4.30*

На рынке манны небесной спрос зависит от рекламных вложений и выражается соотношением $p = 1 - q(1-a)$. Здесь p – цена за 1 г, тыс. руб., q – объем продаж, тонн, $0 \le a \le 1$ – затраты на рекламу, млрд руб. Себестоимость добычи не зависит от объема и составляет 500 руб. за 1 г. При каком объеме рекламных вложений можно получить максимальную прибыль?

Решение:

Задачу можно решать, выписав функцию прибыли

$$\pi = (p - 0{,}5)q - a = (1 - q(1-a) - 0{,}5)q - a \to \max ,$$

найдя оптимальный объем добычи при каждом уровне рекламных вложений и затем исследовав функцию прибыли от оптимального объема добычи на максимум по одной переменной: уровню рекламных вложений.

Однако проще заметить, что **при равенстве рекламных вложений 1 млрд руб.** уравнение спроса принимает вид $p=1$, т.е. по цене 1 тыс. руб. за 1 г можно продать неограниченное количество продукции. Поскольку себестоимость составляет 500 руб., что меньше продажной цены, можно получить неограниченную прибыль.

Задача 4.31*

Фирма является монополистом на внутреннем рынке, где спрос на ее продукт описан функцией $q_D = 210 - p$. Функция общих издержек имеет вид $TC(q) = 0{,}5q^2 + 2000$.

1. Определить оптимальный объем производства.
2. Определить, какое количество продукции фирма будет продавать на внутреннем и внешнем рынке, если на внешнем рынке она может продать любое количество продукции по цене $p = 100$.

Решение:

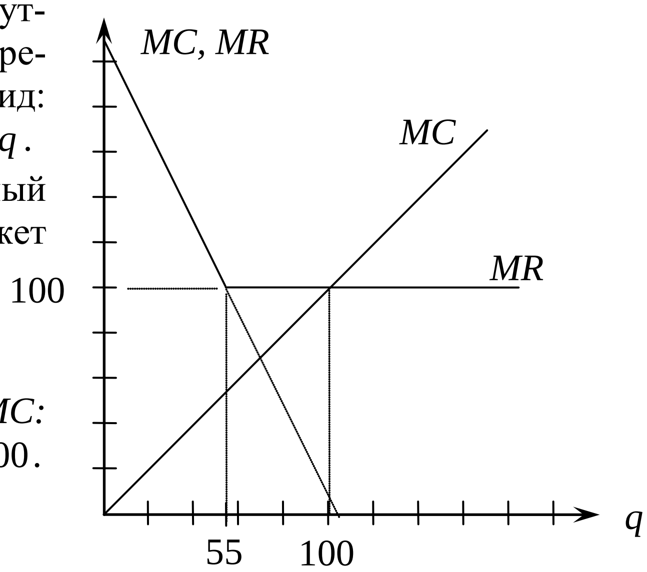
1. Из функции спроса выразим цену, по которой продастся объем продукции q: $p = 210 - q$. Составим функцию прибыли и максимизируем ее:
   $\pi(q) = pq - TC(q) = (210 - q)q - \left(0{,}5q^2 + 2000\right) = -1{,}5q^2 + 210q - 2000 \to \max$,
   $\pi'(q) = -3q + 210 = 0$, $q^* = 70$.

   Задачу также можно решить, приравнивая предельную выручку и предельные издержки. Этот способ рассмотрим при решении второй задачи.
2. Найдем функцию предельных издержек: $MC(q) = TC'(q) = q$.

   Если бы существовал только внутренний рынок, то функция предельного дохода имела бы вид: $MR = TR' = ((210 - q)q)' = 210 - 2q$.

   Однако имеется неограниченный внешний рынок, где фирма может продавать продукцию по 100 руб. Таким образом, $MR(q) = \max\{210 - 2q; 100\}$.

   Приравняем функции MR и MC: $\max\{210 - 2q; 100\} = q$, $q^* = 100$.



Ответ: 1. q^*=70

2. q^*=100, из них

q_1=55 продается на внутреннем рынке, а

q_2=45 продается на на внешнем рынке

Задача 4.32*

Фирма, производящая пирожные, продает их в своем фирменном отделе, где суточный спрос составляет $q_D = 200 - 2p$ (здесь p – цена пирожного, руб., а q – объем продаж, шт.), и на центральном рынке, где существует возможность продать неограниченное количество пирожных по 60 руб. Определить объем продаж в фирменном отделе и на рынке, а также цену пирожного в фирменном отделе, при которых прибыль будет максимальна. Суммарные издержки на производство пирожных составляют $TC(q) = 0{,}1q^2 + 40q + 500$.

Решение:
Пускай в фирменном отделе будет продаваться q_1 пирожных, а на центральном рынке q_2 пирожных. Из функции спроса в фирменном отделе выразим цену: $p_1 = 100 - 0{,}5q_1$. Выручка при этом составит $TR_1(q_1) = p_1 q_1 = (100 - 0{,}5q_1)q_1 = 100q_1 - 0{,}5q_1^2$. Также имеется выручка $TR_2(q_2) = 60q_2$ на центральном рынке. Учитывая, что функция издержек зависит от суммарного объема производства, составим функцию прибыли

$$\pi(q_1, q_2) = TR_1(q_1) + TR_2(q_2) - TC(q_1 + q_2),$$

$$\pi(q_1, q_2) = 100q_1 - 0{,}5q_1^2 + 60q_2 - 0{,}1(q_1 + q_2)^2 - 40(q_1 + q_2) - 500 =$$
$$= 100q_1 - 0{,}5q_1^2 + 60q_2 - 0{,}1q_1^2 - 0{,}2q_1q_2 - 0{,}1q_2^2 -$$
$$- 40q_1 - 40q_2 - 500 \to \max_{q_1,\, q_2}.$$

Найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 100 - q_1 - 0{,}2q_1 - 0{,}2q_2 - 40 = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 60 - 0{,}2q_1 - 0{,}2q_2 - 40 = 0.$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 1{,}2q_1 + 0{,}2q_2 = 60, \\ 0{,}2q_1 + 0{,}2q_2 = 20. \end{cases} \Rightarrow q_1 = 40,\ q_2 = 60,\ q = 100,\ p_1 = 100 - 0{,}5 \cdot 40 = 80 \text{ руб.}$$

Таким образом, фирма будет производить **100 пирожных** в день, из них **40** она продает в фирменном отделе **по 80 руб.**, а оставшиеся **60** – на центральном рынке.

Задача 4.33*

Характеризуются ли следующие производственные функции убывающей, постоянной или возрастающей отдачей от масштаба? Здесь q – объем производства, зависящий от величины используемого капитала K и труда L.

1. $q = 0{,}5\sqrt{KL}$. 2. $q = 0{,}1KL + K^{2/3}L^{1/3}$. 3. $q = 2\sqrt{KL} + 3\sqrt[3]{KL}$. 4. $q = aK + bL$.

Решение:
Если при увеличении использования каждого из факторов производства в α раз ($\alpha > 1$) объем производства вырастает более чем в α раз, то имеем возрастающую отдачу от масштаба, менее чем в α раз – убывающую, ровно в α раз – постоянную отдачу от масштаба. В нашем случае:

$$q_1(\alpha K; \alpha L) = 0{,}5\sqrt{\alpha K \cdot \alpha L} = \alpha \cdot 0{,}5\sqrt{KL} = \alpha\, q_1(K; L);$$

$$q_2(\alpha K; \alpha L) = 0{,}1\alpha K \alpha L + (\alpha K)^{2/3}(\alpha L)^{1/3} = 0{,}1\alpha^2 KL + \alpha K^{2/3}L^{1/3} >$$
$$> \alpha\left(0{,}1KL + K^{2/3}L^{1/3}\right) = \alpha\, q_2(K; L);$$

$$q_3(\alpha K; \alpha L) = 2\sqrt{\alpha K * \alpha L} + 3\sqrt[3]{\alpha K * \alpha L} = 2\alpha\sqrt{KL} + 3\alpha^{2/3}\sqrt[3]{KL} <$$
$$< \alpha\left(2\sqrt{KL} + 3\sqrt[3]{KL}\right) = \alpha\, q_3(K; L);$$

$$q_4(\alpha K; \alpha L) = a(\alpha K) + b(\alpha L) = \alpha(aK + bL) = \alpha\, q_4(K; L).$$

Ответ. 1. Постоянная отдача от масштаба.
2. Возрастающая отдача от масштаба.
3. Убывающая отдача от масштаба.
4. Постоянная отдача от масштаба.

Задача 4.34*

В молодежном лагере «Шалопай» проживает 100 детей. Каждому из них выделяется до 15 руб. в день на мороженое. Причем каждый не может съесть больше килограмма в день, а цену запрещено поднимать выше 150 руб./кг. В лагере есть единственный ларек тети Дуси, где продают мороженое, которое привозят из города по цене 50 руб./кг.

1. Построить кривую спроса на мороженое.
2. По какой цене будет продавать мороженое тетя Дуся, чтобы получить максимальную прибыль?
3. Завхоз лагеря предложил выдавать ежедневно каждому из детей не 15 руб., а 20, но за вычетом цены 100 г мороженого. Какая цена на мороженое установится, если тете Дусе это известно, и она будет по-прежнему максимизировать свою прибыль? Как изменится объем продаж? Как изменятся расходы лагеря?

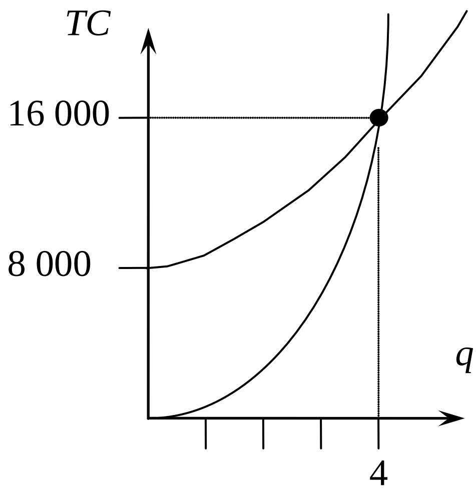
Решение:

1. При цене p руб./кг каждый ребенок на 15 руб. в состоянии купить $(15/p)$ кг мороженого, а все совместно – $1500/p$. Максимально в день дети могут съесть 100 кг мороженого. Таким образом,
$$q_D = \min\{1500/p; 100\},\ p \le 150.$$
2. Прибыль тети Дуси составит
$$\pi_1 = pq - 50q = (p-50)1500/p = 1500 - 75\,000/p \to \max_{p\in[15;150]}.$$
Максимальное значение будет при наивысшей разрешенной цене в **150 руб./кг**, при этом каждый ребенок будет покупать **по 100 г мороженого**, прибыль тети Дуси будет равна **1000 руб./день**. Расходы лагеря **1500 руб./день**.
3. В новой ситуации каждому ребенку будет выдаваться по $(20 - 0{,}1p)$ руб., таким образом, новый спрос и прибыль тети Дуси составят
$$q_D = \min\{100(20 - 0{,}1p)/p; 100\},\ p \le 150,$$
$$\pi_2 = pq - 50q = (100p - 5000)(20 - 0{,}1p)/p = $$
$$= -10p + 2500 - 100\,000/p \to \max_{p\le 15}.$$
$$-10 + 100\,000/p^2 = 0,\ p^2 = 10\,000,\ p = 100 \text{ руб.}$$
Таким образом, тетя Дуся будет продавать мороженое по **100 руб./кг**, при этом каждый ребенок будет получать по $20 - 0{,}1\cdot 100 = 10$ руб. и по-прежнему покупать **по 100 г мороженого**, прибыль тети Дуси будет равна **500 руб./день**, а расходы лагеря **сократятся до 1000 руб**.

Задача 4.35*

Фермеру необходимо за день обработать свой участок земли. Площадь обрабатываемой за день земли задана функцией $q = \sqrt{L}\sqrt{1+K}$ (га), где L – количество нанятых батраков, $K \in \{0; 1\}$ – количество используемых тракторов (можно арендовать трактор или не арендовать). Нанять одного батрака на день стоит 1000 руб. Суточная аренда трактора стоит 8000 руб. Построить функцию совокупных издержек фермера, нарисовать ее график. Показать, начиная с какого размера участка фермеру выгодно арендовать трактор.

Решение:



У фермера есть две возможности: арендовать трактор или не арендовать. Если он просто нанимает L батраков (K = 0), то площадь обрабатываемой земли $q = \sqrt{L}$. Т.е. для обработки участка площадью q потребуется нанять $L = q^2$ батраков, заплатив им $TC_0(q) = 1000q^2$ руб. Если фермер кроме L батраков арендует трактор ($K = 1$), то площадь обрабатываемой земли равна $q = \sqrt{2L}$, и для обработки участка площадью q потребуется нанять $L = 0{,}5q^2$ батраков.

Суммарные издержки в этом случае равны $TC_1(q) = 8000 + 500q^2$. Фермер в зависимости от размера участка выбирает, какой из вариантов обойдется ему дешевле. Графиком совокупных издержек будет график минимума из двух функций. Определим, при каком размере участка фермеру будет выгодно арендовать трактор:

$$TC_1(q) < TC_0(q),\ \ 8000 + 500q^2 < 1000q^2,\ \ 500q^2 > 8000,\ \ q^2 > 16,\ \ q > 4.$$

Ответ. При размере участка **больше 4 га** выгодно арендовать трактор.

Задача 4.36*

Суммарная полезность всех различающихся между собой потребителей данного сорта вина, издержки производства которого равны 150 руб. за бутылку, составляет $U = 50q + 200\sqrt{q}$ (именно такую сумму в тыс. руб. они готовы заплатить за q тыс. бутылок). Построить функцию спроса на вино. Найти оптимальную цену, объем продаж и прибыль производителя. Пусть после серии публикаций о качестве данного вина полезность, выраженная в готовности платить, выросла вдвое (за каждую бутылку потребители готовы отдать вдвое больше денег). Поднимет ли цену производитель, максимизирующий свою прибыль? Что произойдет с объемом продаж?

Решение:

Максимальная цена, которую потребитель готов заплатить за бутылку, совпадает с ее предельной полезностью. Следовательно, функция спроса примет вид

$$p = MU(q) = U'(q) = \left(50q + 200\sqrt{q}\right)' = 50 + 100\big/\sqrt{q}\,.$$

Построим функцию прибыли производителя и максимизируем ее:

$$\pi = (p - 150)q = \left(50 + 100\big/\sqrt{q} - 150\right)q = 100\sqrt{q} - 100q \to \max,$$

$$50\big/\sqrt{q} - 100 = 0, \quad q = 0{,}25,$$

$$p = 50 + 100\big/\sqrt{0{,}25} = 250, \quad \pi = 100\sqrt{0{,}25} - 100 \cdot 0{,}25 = 25.$$

Таким образом, производитель продает **250 бутылок по 250 руб.**, получая прибыль **25 тыс. руб.**

При удвоении полезности до уровня $U = 100q + 400\sqrt{q}$, обратная функция спроса также станет принимать вдвое большее значение:

$$p = U'(q) = 100 + 200\big/\sqrt{q}\,.$$

Максимизируем прибыль производителя и найдем оптимальный объем и цену:

$$\pi = (p - 150)q = \left(100 + 200\big/\sqrt{q} - 150\right)q = 200\sqrt{q} - 50q \to \max,$$

$$100\big/\sqrt{q} - 50 = 0,$$

$$q = 4, \quad p = 100 + 200\big/\sqrt{4} = 200, \quad \pi = 200\sqrt{4} - 50 \cdot 4 = 200.$$

При удвоении спроса производитель даже **сокращает цену до 200 руб.** в целях шестнадцатикратного роста продаж до **4 тыс. бутылок** и получении прибыли **200 тыс. руб.**

Задача 4.37**

Малая фирма, печатающая фотографии, работает на рынке с постоянной ценовой эластичностью спроса. Известно, что оптимальной является цена, втрое превышающая себестоимость одной фотографии, не зависящую от объема печати. Прибыль фирмы при цене 1 руб. составляет 27 тыс. руб., а при цене 2,25 руб. – 48 тыс. руб. Найти оптимальную цену, соответствующий объем печати и получаемую при этом прибыль фирмы.

Решение:

Спрос на рынке с постоянной ценовой эластичностью ε задается функцией $q_D = ap^{\varepsilon}$, где $a > 0$ – произвольная константа, тогда выручка равна $TR = pq = ap^{\varepsilon+1}$. Себестоимость одной фотографии c не зависит от объема печати, поэтому суммарные издержки заданы в виде $TC = cq = acp^{\varepsilon}$. Выпишем функцию прибыли и максимизируем ее:

$$\pi = TR - TC = ap^{\varepsilon+1} - acp^{\varepsilon} \to \max,$$

$$a(\varepsilon + 1)p^{\varepsilon} - ac\varepsilon\, p^{\varepsilon-1} = 0, \quad ap^{\varepsilon-1}\left((\varepsilon + 1)p - c\varepsilon\right) = 0,$$

$$p = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}c = 3c,\quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = 3,\quad \varepsilon = 3\varepsilon + 3,\quad \varepsilon = -1{,}5,\quad q_D = ap^{-1{,}5} = \frac{a}{p\sqrt{p}}.$$

Таким образом, прибыль выражается соотношением $\pi = \frac{a}{\sqrt{p}} - \frac{ac}{p\sqrt{p}}$.

Поскольку известно, что при $p = 1$ $\pi = 27$, а при $p = 2{,}25$ $\pi = 48$, то

$$\begin{cases} 27 = a - ac \\ 48 = \frac{a}{1{,}5} - \frac{ac}{2{,}25 \cdot 1{,}5} \end{cases} \qquad \begin{cases} 27 = a(1-c) \\ 162 = a(2{,}25-c) \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$6 = \frac{2{,}25-c}{1-c},\quad 6 - 6c = 2{,}25 - c,\quad c = 0{,}75,\quad a = \frac{27}{1-0{,}75} = 108.$$

Оптимальная цена будет равна $p^* = 3 \cdot 0{,}75 = 2{,}25$ руб., объем печати составит $q^* = \frac{108}{2{,}25\sqrt{2{,}25}} = 32$ тыс. фото. Прибыль – $\pi^* = \frac{108}{\sqrt{2{,}25}} - \frac{108 \cdot 0{,}75}{2{,}25 \cdot \sqrt{2{,}25}} = 48$ тыс. руб.

Задача 4.38*

Маркетинговое исследование показало, что спрос на некоторую модель сотового телефона составляет $q_D = 3000 - p$ (p – цена, руб., q – объем продаж, шт.). Компания «Шестисотовый» покупает их у производителя по 1600 руб. Какой будет розничная цена? Воспользуется ли компания пятипроцентной скидкой от производителя, которую тот предоставляет всем приобретающим от 1 тыс. экз.? Изменится ли что-то, если компания-партнер предложит продавать ей излишки по 1220 руб.?

Решение:

Функция прибыли компании «Шестисотовый»

$$\pi = (p-1600)(3000-p) = -p^2 + 4600p - 4\,800\,000$$

достигает максимума, когда ее производная равна нулю:

$$\pi' = -2p + 4600 = 0,\quad \boldsymbol{p = 2300}\textbf{ руб., } \boldsymbol{q = 700}\textbf{ шт., } \boldsymbol{\pi = 490}\textbf{ тыс. руб.}$$

Если компания решит воспользоваться скидкой, она вынуждена будет увеличить продажи телефонов до **1000 шт**. Максимальная цена, по которой это можно осуществить, находится из функции спроса и составляет **2000 руб.** Каждый телефон, покупаемый теперь по 1600·0,95 = 1520 руб., приносит прибыль 480 руб. Соответственно, суммарная прибыль составит **480 тыс. руб.**, что меньше, чем в первом варианте. Следовательно, компания **не будет пользоваться скидкой**.

Если же появляется партнер, ситуация меняется. Если розничная цена устанавливается в размере p руб., то будет продано (3000 – p) телефонов, оставшиеся же 1000 – (3000 – p) = (p – 2000) экз. будут проданы партнеру с убытками 1520 – 1220 = 300 руб. Итоговая прибыль составит

$$\pi = (p-1520)(3000-p) - 300 \cdot (p-2000) = -p^2 + 4220p - 3\,960\,000.$$

Приравняв производную к нулю, найдем точку максимума:

$-2p+4220=0$, **p = 2110 руб., q = 890 шт., π = 492,1 тыс. руб.**

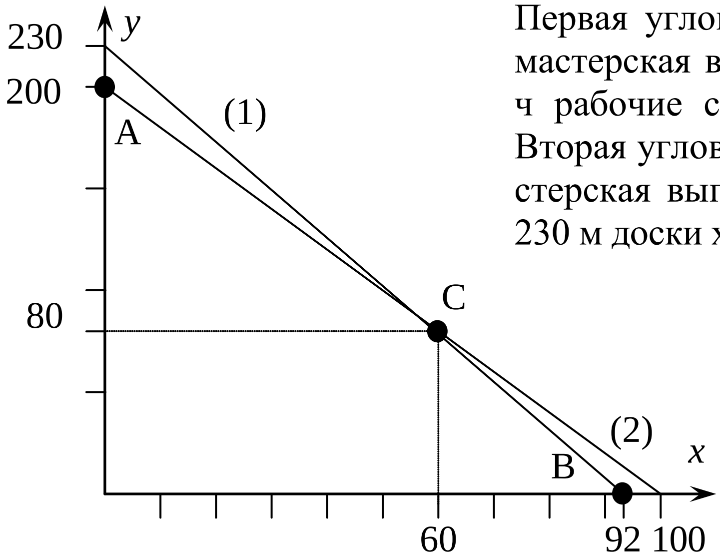
Прибыль превышает исходную, поэтому **скидку использовать целесообразно**.

Задача 4.39*

Столярная мастерская занимается выпуском столов и стульев. На их производство тратится соответственно 2,5 и 1 м доски, а также 0,8 и 0,4 ч рабочего времени. Построить множество производственных возможностей, если суточные запасы доски равны 230 м, а на фабрике работают 10 рабочих по 8 ч в сутки. Найти оптимальный объем производства, если прибыли от реализации 1 стола 250 руб., а одного стула 150 руб. Изменится ли что-то, если прибыль от реализации одного стола увеличится до 350 руб.?

Решение:

Пусть мастерская выпускает $x \ge 0$ столов и $y \ge 0$ стульев. Тогда на них тратится $(2{,}5x + y)$ м доски и $(0{,}8x + 0{,}4y)$ ч рабочего времени. По условию суточные запасы доски составляют 230 м, а суточный ресурс рабочего времени 80 человеко-часов. Поэтому в задаче будет два ограничения: $2{,}5x + y \le 230$ (1) и $0{,}8x + 0{,}4y \le 80$ (2)



Первая угловая точка – точка A(0; 200) – мастерская выпускает только стулья, за 80 ч рабочие сделают 80/0,4 = 200 стульев. Вторая угловая точка – точка B(92; 0) – мастерская выпускает исключительно столы, 230 м доски хватит на 230/2,5 = 92 стола.

И третья угловая точка – точка C. Для ее нахождения нужно решить систему:

$$2{,}5x + y = 230,$$
$$0{,}8x + 0{,}4y = 80.$$

Получим координаты точки C (60; 80).

Известно, что оптимальный выбор достигается в угловой точке. Найдем прибыли в каждой из них: $\pi(A) = 150 \cdot 200 =$ **30 тыс. руб.**, $\pi(B) = 250 \cdot 92 = 23$ тыс. руб., $\pi(C) = 250 \cdot 60 + 150 \cdot 80 = 27$ тыс. руб. Таким образом, мастерская должна **все ресурсы использовать для выпуска стульев**.

Если прибыль увеличится до 350 руб., то суммарные прибыли станут равны соответственно $\pi(B) = 350 \cdot 92 = 32{,}2$ тыс. руб. и $\pi(C) = 350 \cdot 60 + 150 \cdot 80 =$ **33 тыс. руб.** Оптимум – точка C, **мастерская должна производить и столы, и стулья.**

Задача 4.40*

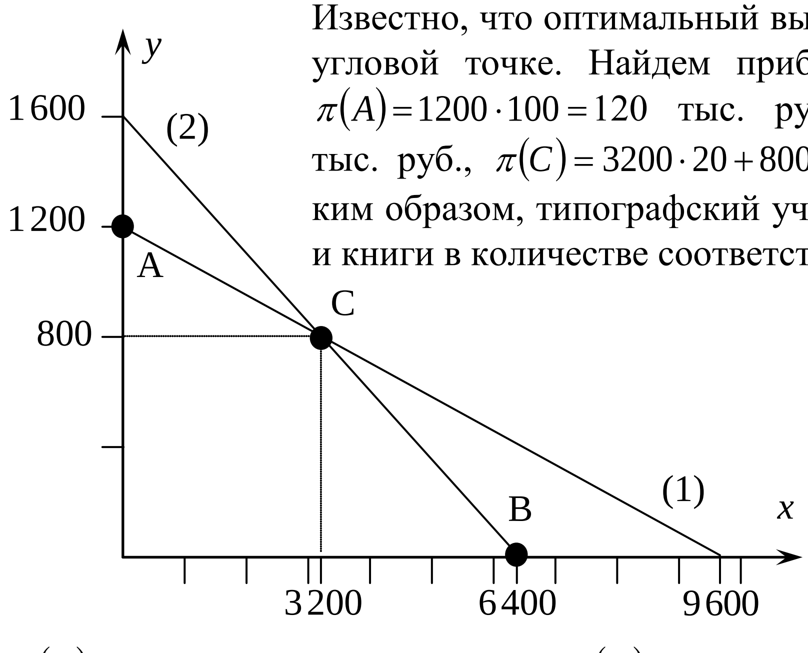
Участок типографии осуществляет выбор между тиражированием 40-страничной брошюры и 320-страничной книги. Месячный запас бумаги составляет 384 тыс. страниц. Каждый из двух операторов, работающих в месяц 20 дней по 8 ч, может подготавливать по 20 брошюр или по 5 книг в час. Построить множество производственных возможностей. Указать оптимальный выбор, если заказчик платит за каждую брошюру по 20 руб., а за каждую книгу по 100 руб. При какой отпускной цене книг типографии будет выгодно тиражировать исключительно их?

Решение:

Пусть типографский участок издает $x \geq 0$ брошюр и $y \geq 0$ книг. Тогда в них содержится ($40x + 320y$) страниц, а на их подготовку уходит ($1/20\,x + 1/5\,y$) ч рабочего времени. По условию месячный запас бумаги составляет 384 тыс. страниц, а месячный ресурс рабочего времени – $2{\cdot}20{\cdot}8 = 320$ человеко-часов. Поэтому в задаче будет два ограничения: $40x + 320y \leq 384\,000$ (1) и $1/20\,x + 1/5\,y \leq 320$ (2). Первая угловая точка – точка A (0; 1200) – типография издает только книги, 384 тыс. страниц хватит на 384 000 / 320 = 1200 книг. Вторая угловая точка – точка B (6 400; 0). Типография издает исключительно брошюры, 320 ч рабочего времени хватит на 320 / 1/20 = 6 400 брошюр. И третья угловая точка – точка C. Для ее нахождения нужно решить систему:

$$\begin{cases} 40x + 320y = 384\,000, \\ 1/20\,x + 1/5\,y = 320. \end{cases}$$

Координаты точки C (3200; 800).



Известно, что оптимальный выбор фирмы достигается в угловой точке. Найдем прибыли в каждой из них: $\pi(A) = 1200 \cdot 100 = 120$ тыс. руб., $\pi(B) = 6400 \cdot 20 = 128$ тыс. руб., $\pi(C) = 3200 \cdot 20 + 800 \cdot 100 =$ **144 тыс. руб**. Таким образом, типографский участок издает и брошюры, и книги в количестве соответственно **3200 и 800 экз**.

Типографии станет выгодно перейти исключительно на издание книг при такой отпускной цене p, при которой прибыль в точке A окажется выше, чем в точке C:

$$\pi(A) = 1200 \cdot p > 3200 \cdot 20 + 800p = \pi(C), \quad 400p > 64\,000, \quad \boldsymbol{p > 160} \text{ **руб.**}$$

Задача 4.41**

Кондитерская фирма «Пир-ОК» печет пирожные и торты, максимальный суточный выпуск которых (при отсутствии производства другого продукта) составляет 10 тыс. и 500 шт. соответственно, а граница множества производственных возможностей является отрезком прямой. Спрос на пирожные неограничен при цене 10 руб. за шт., при этом издержки производства заданы функцией $TC_1(q_1) = 15\,000 + 5q_1$, где q_1 – объем производства пирожных. Суточный спрос на торты задан функцией $q_2 = 750 - 2{,}5p_2$, где p_2 – цена торта, а q_2 – объем продаж.

Издержки производства тортов в данной фирме заданы функцией $TC_2(q_2) = 10\,000 + 50q_2 + 0{,}1q_2^2$. Найти оптимальные объемы производства и цены каждого продукта, а также прибыль производителя. Меняется ли что-то, если при выпуске только одного из продуктов постоянные издержки для второго отсутствуют?

Решение:

Альтернативные издержки производства одного торта составляют $10\,000/500 = 20$ пирожных. Пусть фирма выпекает $q_2 = q$ тортов, тогда объем выпечки пирожных составит $10\,000 - 20q$, выручка от их продажи $TR_1 = 10(10\,000 - 20q) = 100\,000 - 200q$, а соответствующие издержки $TC_1 = 15\,000 + 5(10\,000 - 20q) = 65\,000 - 100q$.

Поскольку спрос на торты задан функцией $q = 750 - 2{,}5p$, то, выразив цену через количество, найдем максимальную цену, по которой все q тортов фирма в состоянии продать: $p = 300 - 0{,}4q$. Выручка за проданные торты будет равна $TR_2 = (300 - 0{,}4q)q = 300q - 0{,}4q^2$, а издержки $TC_2 = 10\,000 + 50q + 0{,}1q^2$.

Построим и максимизируем функцию прибыли:

$$\begin{aligned}\pi(q) &= TR_1(q) - TC_1(q) + TR_2(q) - TC_2(q) = \\ &= (100\,000 - 200q) - (65\,000 - 100q) + \\ &+ (300q - 0{,}4q^2) - (10\,000 + 50q + 0{,}1q^2) = \\ &= 25\,000 + 150q - 0{,}5q^2 \to \max.\end{aligned}$$

Приравняв производную к нулю, получим:

$150 - q = 0$, $q_2 = q = 150$ тортов,

$p_2 = 240$ руб./торт,

$q_1 = 10\,000 - 20 \cdot 150 = 7\,000$ пирожных,

$TR_1 = 100\,000 - 200 \cdot 150 = 70\,000$ руб.,

$TC_1 = 65\,000 - 100 \cdot 150 = 50\,000$ руб.

$TR_2 = 300 \cdot 150 - 0{,}4 \cdot 150^2 = 36\,000$ руб.,

$TC_2 = 10\,000 + 50 \cdot 150 + 0{,}1 \cdot 50^2 = 19\,750$ руб.

Таким образом, фирма «Пир-ОК» будет выпекать **150 тортов** и **7000 пирожных** в сутки, цена торта составит **240 руб.** Суточная прибыль окажется равной $(70\,000-50\,000)+(36\,000-19\,750)=$ **36 250 руб.**

Если при выпуске исключительно пирожных издержки производства тортов равны нулю (постоянные издержки отсутствуют), то фирма может получить прибыль $\pi=10q_1-15\,000-5q_1=5q_1-15\,000$. При максимально возможном выпуске в 10 тыс. пирожных она составит **35 000 руб.**

Если при выпуске исключительно тортов издержки производства пирожных равны нулю, то фирма может получить прибыль

$$\pi=p_2q_2-TC_2(q_2)=(300-0{,}4q_2)q_2-10\,000-50q_2-0{,}1q_2^2=$$
$$=250q_2-0{,}5q_2^2-10\,000.$$

Максимизируем ее:

$$250-q_2=0,\ q_2=250<500,\ p=300-0{,}4\cdot 250=200,$$
$$\pi=200\cdot 250-10\,000-50\cdot 250-0{,}1\cdot 250^2=\mathbf{21\,250\ руб.}$$

Видим, что оба этих варианта хуже, чем вариант с выпуском обоих видов продукции. Поэтому **отсутствие постоянных издержек ничего не изменит**.

Задача 4.42*

Сотовый оператор «Пчелайн» планирует вход на иркутский и шелеховский рынок. Годовой спрос на иркутском рынке он оценивает в размере $q_1=50-10p$, спрос на шелеховском рынке – $q_2=7{,}6-2p$. Здесь p – цена разговора, руб./мин., q – суммарное время разговоров, млн мин. Себестоимость 1 мин разговора составляет 1 руб. Постоянные издержки работы на иркутском рынке равны 30 млн руб./год, на шелеховском рынке – 3 млн руб./год. Определить ценовую политику компании, если она применяет ценовую дискриминацию, устанавливая отдельные тарифы для Иркутска и Шелехова. Что произойдет, если запретить ценовую дискриминацию? Что произойдет, если постоянные издержки работы на шелеховском рынке возрастут до 3,5 млн руб.? Рассмотреть случай использования ценовой дискриминации и запрета на нее.

Решение:

Ценовая дискриминация означает определение оптимальной цены и соответствующего объема продаж на каждом отдельном рынке.

На иркутском рынке функция прибыли равна

$$\pi_1=p_1q_1-cq_1-F_1=p_1(50-10p_1)-1(50-10p_1)-30=$$
$$=-10p_1^2+60p_1-80\to\max.$$

Приравняем производную функции прибыли к нулю

$$-20p_1+60=0,$$
$$p_1=\mathbf{3},\quad q_1=50-10\cdot 3=\mathbf{20},\quad \pi_1=-10\cdot 3^2+60\cdot 3-80=\mathbf{10}.$$

На шелеховском рынке функция прибыли равна

$$\pi_2 = p_2 q_2 - cq_2 - F_2 = p_2(7{,}6 - 2p_2) - 1(7{,}6 - 2p_2) - 3 =$$
$$= -2p_2^2 + 9{,}6p_2 - 10{,}6 \to \max.$$

Приравняем производную функции прибыли к нулю

$$-4p_2 + 9{,}6 = 0,$$

$$p_2 = \mathbf{2{,}4}, \quad q_2 = 7{,}6 - 2\cdot 2{,}4 = \mathbf{2{,}8}, \quad \pi_2 = -2\cdot 2{,}4^2 + 9{,}6\cdot 2{,}4 - 10{,}6 = \mathbf{0{,}92}.$$

В случае запрета ценовой дискриминации устанавливается единая цена p для обоих рынков. Суммарный спрос равен $q = q_1 + q_2 = 57{,}6 - 12p$. С учетом того, что в Шелехове спрос существует только при цене ниже 7,6/2 = 3,8 руб., эта формула будет верна для $p < 3{,}8$.

$$\pi = pq - cq - F_1 - F_2 = p(57{,}6 - 12p) - 1(57{,}6 - 12p) - 30 - 3 =$$
$$= -12p^2 + 69{,}6p - 90{,}6 \to \max.$$

Приравняем производную функции прибыли к нулю

$$-24p + 69{,}6 = 0,$$

$$p = \mathbf{2{,}9}, \quad q_1 = 50 - 10\cdot 2{,}9 = \mathbf{21}, \quad q_2 = 7{,}6 - 2\cdot 2{,}9 = \mathbf{1{,}8}.$$

Прибыли, получаемые компанией с каждого из рынков, равны

$$\pi_1 = 2{,}9\cdot 21 - 1\cdot 21 - 30 = \mathbf{9{,}9}, \quad \pi_2 = 2{,}9\cdot 1{,}8 - 1\cdot 1{,}8 - 3 = \mathbf{0{,}42}.$$

Суммарные прибыли составят $\pi = \pi_1 + \pi_2 = 10{,}32$.

Если постоянные издержки в Шелехове возрастут до 3,5 млн руб. (т.е. прибыль сократится на 0,5 млн руб.), то при отсутствии ценовой дискриминации суммарная прибыль станет равной $\pi = \pi_1 + \pi_2 = 10{,}32 - 0{,}5 = 9{,}82$, что меньше 10 млн руб., получаемых исключительно с иркутского рынка. Работать только на иркутском рынке оказывается выгоднее, следовательно, **оператор уйдет с шелеховского рынка**. В случае использования ценовой дискриминации прибыль на шелеховском рынке сократится до уровня $\pi_2 = 0{,}92 - 0{,}5 = 0{,}42$, но останется положительной. **Оператор останется на шелеховском рынке**.

Задача 4.43*

Record-компания решает вопрос об издании альбома группы, спрос на диски которой оценивается функцией $q_D = 900/p - 4$ (тыс. шт.), где p – цена, руб. Себестоимость одного диска 25 руб. При этом за право издания компания должна выплатить группе 350 тыс. руб. Возьмется ли компания издавать альбом, если минимальная прибыль, за которую она готова это сделать, составляет 100 тыс. руб.? Что изменится, если компания применит «политику снятия сливок», установив изначально цену 150 руб., по которой диск по оценкам купит 88 % из готовых это сделать по такой цене, а затем будет максимизировать прибыль на остаточном рынке?

Решение:

Выпишем функцию прибыли record-компании и максимизируем ее:

$$\pi = (p-25)(900/p-4)-350 = 900-25\cdot 900/p-4p+100-350 \to \max,$$

$$25\cdot 900/p^2-4=0, \quad p^*=75, \quad q^*=900/75-4=8,$$

$$\pi^* = (75-25)\cdot 8-350 = \mathbf{50\ тыс.\ руб.}$$

Видим, что эта сумма не достигает минимального уровня 100 тыс. руб., следовательно, **компания откажется от издания альбома**. Проверим, изменит ли ситуацию «политика снятия сливок».

По цене 150 руб. спрос составляет $q_D = 900/150-4=2$ тыс. дисков. 88 % из этого количества будет куплена, соответственно остаточный спрос сократится на 2·0,88 = 1,76 тыс. дисков и составит $q_{ост} = 900/p-5{,}76$. Выпишем функцию прибыли и найдем оптимальную цену на остаточном спросе:

$$\pi_{ост} = (p-25)(900/p-5{,}76)-350 = 900-25\cdot 900/p-5{,}76p+144-350 \to \max,$$

$$25\cdot 900/p^2-5{,}76=0, \quad p_{ост}=62{,}5, \quad q_{ост}=900/62{,}5-5{,}76=8{,}64.$$

Суммарная прибыль будет складываться из прибыли от проданных по высокой цене дисков и от прибыли на остаточном спросе:

$$\pi^* = (150-25)\cdot 1{,}76+(62{,}5-25)\cdot 8{,}64-350 = \mathbf{194\ тыс.\ руб.}$$

Данная сумма превосходит необходимые для положительного решения вопроса об издании альбома 100 тыс. руб. **Альбом будет издан.**

Задача 4.44**

Издательство решает вопрос об издании новой книги известного писателя, спрос на которую оценивается функцией $q_D = 20-0{,}1p$ (тыс. шт.), где p – цена, руб. Постоянные издержки составляют 400 тыс. руб. Себестоимость 1 экз. книги 25 руб. При этом за право издания оно должно выплатить писателю гонорар 500 тыс. руб. Возьмется ли издательство издавать книгу, если оно применит «политику снятия сливок», установив изначально высокую цену, по которой книгу, по оценкам, купит половина читателей, готовых это сделать по такой цене, а затем снизив цену? Найти оптимальные цены.

Решение:

Пусть издательство изначально устанавливает цену p_1. По этой цене книгу купит половина из готовых это сделать: $q_1 = 0{,}5\cdot(20-0{,}1p_1) = 10-0{,}05p_1$. После снижения цены до уровня p_2 книгу купят оставшиеся покупатели, кроме уже купивших: $q_2 = (20-0{,}1p_2)-(10-0{,}05p_1) = 10-0{,}1p_2+0{,}05p_1$. Суммарная прибыль издательства составит

$$\begin{aligned}\pi &= p_1q_1+p_2q_2-25(q_1+q_2)-400-500=\\ &=10p_1-0{,}05p_1^2+10p_2-0{,}1p_2^2+0{,}05p_1p_2-\\ &-(250-1{,}25p_1+250-2{,}5p_2+1{,}25p_1+900)=\\ &=-0{,}05p_1^2-0{,}1p_2^2+0{,}05p_1p_2+10p_1+12{,}5p_2-1400 \to \max_{p_1,p_2}.\end{aligned}$$

Для максимизации прибыли приравняем частные производные к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial p_1} = -0{,}1p_1 + 0{,}05p_2 + 10 = 0, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial p_2} = -0{,}2p_2 + 0{,}05p_1 + 12{,}5 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}1p_1 + 0{,}05p_2 + 10 = 0, \\ -0{,}4p_2 + 0{,}1p_1 + 25 = 0. \end{cases}$$

Сложив эти два уравнения, получим: $0{,}35p_2 = 35$.

Таким образом, $\boldsymbol{p_2}$**=100 руб.**, $\boldsymbol{p_1}$**=150 руб.**, $\boldsymbol{q_1}$**=2,5 тыс. шт.**, $\boldsymbol{q_2}$**=7,5 тыс. шт.**, π = 150·2,5 + 100·7,5 – 25·(2,5 + 7,5) – 400 – 500 = **–25 тыс. руб.** Следовательно, издательство **не возьмется за издание книги**.

Задача 4.45*

Фирма «Рита» производит новую модель кроссовок с ежемесячными издержками $TC_1 = 0{,}01q^2 + 0{,}4q + 10$ (млн руб.) и продает ее на рынке со спросом $Q = 140 - 50p$. (тыс.шт.) (здесь p – цена, тыс. руб.) Найти оптимальный объем производства и соответствующую цену. Что произойдет, если у фирмы появится возможность приобрести в дополнение к первой вторую линию, производство кроссовок на которой обойдется в $TC_2 = 5 + 0{,}8q$? Изменится ли что-то, если постоянные издержки производства на второй линии вырастут до 10 млн руб.

Решение:

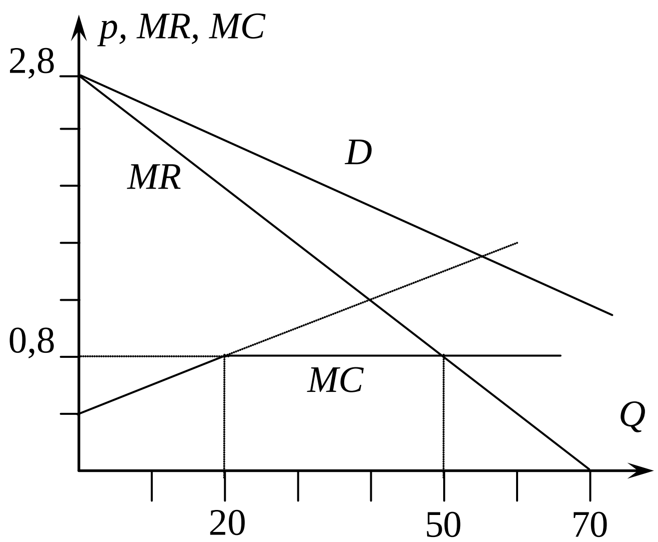
Выпишем функцию прибыли в исходной ситуации, выразив попутно цену через количество $p = (140 - Q)/50 = 2{,}8 - 0{,}02Q$ из функции спроса и учтя равенство $Q = q$:

$$\pi = pq - TC_1 = 2{,}8q - 0{,}02q^2 - 0{,}01q^2 - 0{,}4q - 10 = 2{,}4q - 0{,}03q^2 - 10 \to \max.$$

Приравняв производную к нулю, найдем оптимальный объем производства:

$2{,}4 - 0{,}06q = 0$, $q^* =$ **40 (тыс. шт.)**, $p^* = 2{,}8 - 0{,}02 \cdot 40 =$ **2 (тыс. руб.)**,

$\pi^* = 2 \cdot 40 - 0{,}01 \cdot 40^2 - 0{,}4 \cdot 40 - 10 =$ **38 (млн руб.)**



При наличии нескольких линий производство будет осуществляться там, где окажутся минимальными предельные издержки. Для первой линии они равны $MC_1 = TC_1' = 0{,}02q + 0{,}4$, для второй – $MC_2 = TC_2' = 0{,}8$. Соответственно, при производстве $q \le (0{,}8 - 0{,}4)/0{,}02 = 20$ выгоднее задействовать первую линию, а далее вторую, что показано на графике.

Оптимальный объем производства находится из равенства $MR = MC$. Функция предельной выручки имеет вдвое больший наклон, чем функция спроса, т.е. $MR = 2{,}8 - 0{,}04Q$. Следовательно, $2{,}8 - 0{,}04Q = 0{,}8$, суммарный объем $Q = \mathbf{50}$ **(тыс. шт.)**. Поскольку, как мы уже выяснили в первой части, $q_1{*} = \mathbf{20}$ **(тыс. шт.),** то $q_2{*} = \mathbf{30}$ **(тыс. шт.)**. Цена на рынке окажется равной $p{*} = 2{,}8 - 0{,}02 \cdot 50 = \mathbf{1{,}8}$ **(тыс. руб**.). Прибыль фирмы составит $\pi{*} = \left(1{,}8 \cdot 20 - 0{,}01 \cdot 20^2 - 0{,}4 \cdot 20 - 10\right) + \left(1{,}8 \cdot 30 - 5 - 0{,}8 \cdot 30\right) = 14 + 25 = \mathbf{39}$ **(млн руб**.). С ростом постоянных издержек до 10 млн руб., прибыль упадет до 34 млн руб., что меньше исходных 38 млн руб. **Покупка второй линии станет невыгодной**.

Задача 4.46**

Молокозавод «Священный коровник», производящий молоко с издержками $TC = 50 + 4Q + 0{,}25Q^2$ (тыс. руб.), предлагает свою продукцию трем торговым сетям, суточный спрос которых составляет соответственно $q_1 = 17{,}5 - 0{,}5p$, $q_2 = 11{,}5 - 0{,}5p$ и $q_3 = 18 - p$. Здесь p – цена, руб., q_1, q_2, q_3 и Q – индивидуальные и суммарные суточные объемы продаж, тыс. л..

1. Построить функцию суммарного спроса на продукцию молокозавода.
2. Найти оптимальную цену, объем продаж и прибыль молокозавода, предполагая запрет на использование ценовой дискриминации.
3. Что изменится, если издержки вырастут до уровня $TC = 50 + 5{,}5Q + 0{,}25Q^2$?

Решение:

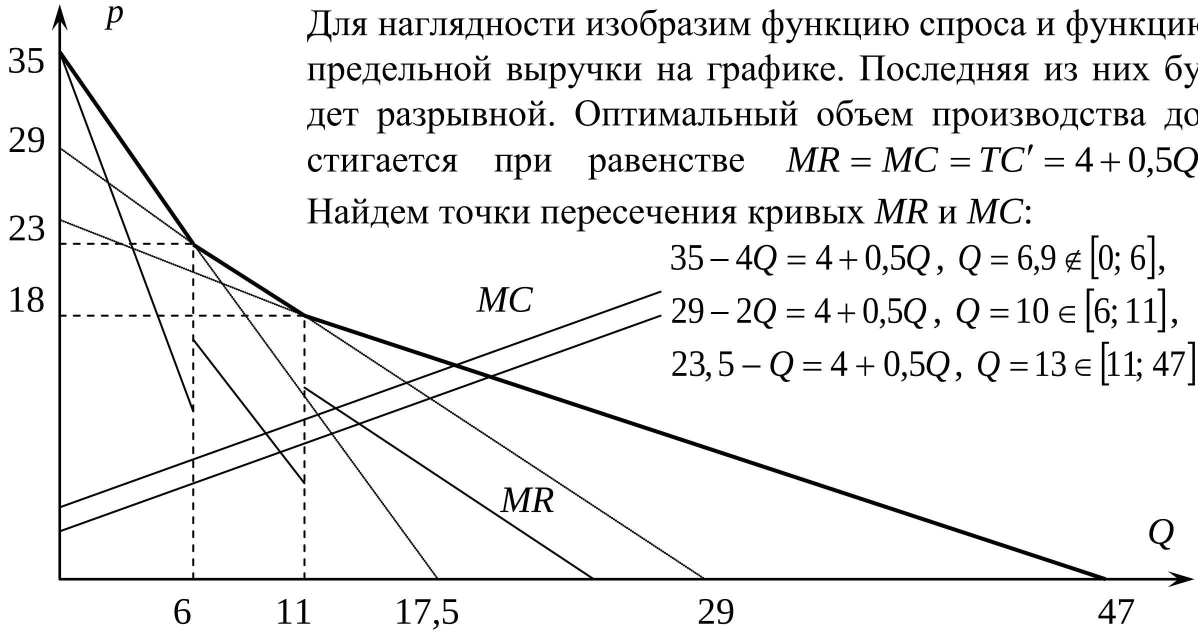
1. Спрос первой из торговых сетей обращается в ноль при цене 35 руб., второй – при цене 23 руб., а третьей – при цене 18 руб. Таким образом,

$$Q = \begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 47 - 2p, & p \in [0; 18], \\ q_1 + q_2 = 29 - p, & p \in [18; 23], \\ q_1 = 17{,}5 - 0{,}5p, & p \in [23; 35], \\ 0, & p \geq 35. \end{cases}$$

   Отметим, что функция спроса является непрерывной, поэтому граничные значения цены можно включать в любой из интервалов.

2. Для дальнейших действий удобнее перейти к обратной функции спроса, выразив цену через количество на каждом из интервалов. Также вычислим функцию предельной выручки, которая для линейной функции спроса $p = a - bQ$ имеет вид $MR = a - 2bQ$, т.е. имеет вдвое больший коэффициент при Q:

$$p = \begin{cases} 35 - 2Q, & Q \in [0; 6], \\ 29 - Q, & Q \in [6; 11], \\ 23{,}5 - 0{,}5Q, & Q \in [11; 47], \\ 0, & Q \geq 47. \end{cases} \quad MR = \begin{cases} 35 - 4Q, & Q \in [0; 6], \\ 29 - 2Q, & Q \in [6; 11], \\ 23{,}5 - Q, & Q \in [11; 47], \\ 0, & Q \geq 47. \end{cases}$$



Для наглядности изобразим функцию спроса и функцию предельной выручки на графике. Последняя из них будет разрывной. Оптимальный объем производства достигается при равенстве $MR = MC = TC' = 4 + 0{,}5Q$. Найдем точки пересечения кривых MR и MC:

$35 - 4Q = 4 + 0{,}5Q$, $Q = 6{,}9 \notin [0;\, 6]$,

$29 - 2Q = 4 + 0{,}5Q$, $Q = 10 \in [6;\, 11]$,

$23{,}5 - Q = 4 + 0{,}5Q$, $Q = 13 \in [11;\, 47]$.

Таким образом, имеем две подозрительные на оптимум точки. Сравним в них прибыли, получаемые молокозаводом.

$Q = 10$, $\quad p = 29 - 10 = 19$,

$TR = 19 \cdot 10 = 190$, $\quad TC = 50 + 4 \cdot 10 + 0{,}25 \cdot 10^2 = 115$, $\quad \pi = 75$.

$Q = 13$, $\quad p = 23{,}5 - 0{,}5 \cdot 13 = 17$,

$TR = 17 \cdot 13 = 221$, $\quad TC = 50 + 4 \cdot 13 + 0{,}25 \cdot 13^2 = 144{,}25$, $\quad \pi = 76{,}75$.

Видим, что в последнем случае прибыль больше. Таким образом, молокозавод будет обслуживать **все три торговые сети**, продавая молоко по **17 руб./л.**

3. Если суммарные издержки имеют вид $TC = 50 + 5{,}5Q + 0{,}25Q^2$, предельные издержки вычисляются по формуле $MC = 5{,}5 + 0{,}5Q$.

$35 - 4Q = 5{,}5 + 0{,}5Q$, $\quad Q = 6{,}6 \notin [0;\, 6]$,

$29 - 2Q = 5{,}5 + 0{,}5Q$, $\quad Q = 9{,}4 \in [6;\, 11]$, $\quad p = 19{,}6$,

$TR = 184{,}24$, $\quad TC = 123{,}79$, $\quad \pi = 60{,}45$.

$23{,}5 - Q = 5{,}5 + 0{,}5Q$, $\quad Q = 12 \in [11;\, 47]$, $\quad p = 17{,}5$,

$TR = 210$, $\quad TC = 152$, $\quad \pi = 58$.

Видим, что прибыль больше в первом случае. Таким образом, молокозавод установит цену **19,6 руб./л.** и будет обслуживать **только две торговые сети**.

5. ТЕОРИЯ ОТРАСЛЕВЫХ РЫНКОВ

Задача 5.1

На рынке действуют репетиторская фирма «МиниМакс» и разработчик сайтов «CWR», на каждой из которых работают 4 чел. по 20 дней в месяц. Работники «МиниМакса» решают по 6 принесенных им контрольных работ в день, а на разработку сайта, что не является их прямой специализацией, тратят 20 дней. Работники «CWR» сайт разрабатывают вчетверо быстрее – за 5 дней, но решают всего по 2 контрольных работы в день.

1. Если в некотором месяце фирмам поступил заказ на разработку 12 сайтов, то какое максимальное количество контрольных работ они смогут выполнить при объединении усилий?
2. Если цена выполнения контрольной работы установилась на рынке в размере 300 руб., то при каком диапазоне цен на разработку сайта обеим фирмам будет выгодна специализация в своей области?

Решение:

1. Месячный ресурс каждой из фирм составляет $4 \cdot 20 = 80$ дней. На разработку 12 сайтов фирма «CWR» потратит $12 \cdot 5 = 60$ дней. За оставшиеся 20 дней ее работники решат $20 \cdot 2 = 40$ контрольных работ. Работники «Минимакса» за месяц выполнят $80 \cdot 6 = 480$ контрольных работ. Таким образом, совместными усилиями будут решены $480 + 40 =$ **520 контрольных работ**.
2. Работники «CWR» разрабатывают сайт в 10 раз дольше, чем решают контрольную работу. Если цена сайта будет превышать цену контрольной работы менее, чем в 10 раз (будет менее 3 000 руб.), то они будут решать контрольные работы. Работники «Минимакса» разрабатывают сайт в 120 раз дольше, чем решают контрольную работу. Если цена сайта превысит цену контрольной работы более, чем в 120 раз (т.е. будет больше 36 000 руб.), то они будут разрабатывать сайты. **При цене сайта от 3000 до 36 000 руб.** будет выгодна специализация.

Задача 5.2*

В стране А используется 20 единиц труда, в стране В – 25. Производственные возможности страны А отражены в уравнении $5x + 2y = 40$, а производственные возможности страны В – в уравнении $3x + 1{,}5y = 42$.

1. Экономика какой страны обладает абсолютным и относительным преимуществом в производстве благ x и y?
2. Если предполагается, что в каждой стране блага потребляются в пропорции 1 единица x на 1,5 единицы y, определить объем производства благ x и y для каждой отдельной экономики, а также с учетом реализации принципа сравнительного преимущества.
3. Предположив, что пропорция обмена соответствует середине интервала допустимых значений, найти объемы потребления благ в каждой из стран.

Решение:

1. Максимальный выпуск каждого вида продукции в стране А равен соответственно $40/5 = 8$ и $40/2 = 20$. Поскольку в экономике используется 20 единиц труда, производительность труда по благам x и y равна соответственно $8/20 = 0{,}4$ и $20/20 = 1$. В стране В максимальный выпуск продукции x и y равен соответственно $42/3 = 14$ и $42/1{,}5 = 28$. В экономике используется 25 единиц труда, поэтому производительность труда по благам x и y равна соответственно $14/25 = 0{,}56$ и $28/25 = 1{,}12$. Поскольку $0{,}56 > 0{,}4$, а $1{,}12 > 1$, **экономика страны В обладает абсолютным преимуществом в производстве благ x и y.**

   Альтернативные издержки производства единицы блага x для страны А составляют $20/8 = 2{,}5$ единицы блага y, а для страны В $28/14 = 2$ единицы блага y. Таким образом, **страна А обладает относительными преимуществами в производстве блага y**, а **страна В – относительными преимуществами в производстве блага x**.
2. Пусть в стране А потребляется x единиц первого блага. Тогда потребление второго составляет $1{,}5x$. Найдем x из ограничения: $5x + 2\cdot1{,}5x = 40$, $8x = 40$, $\mathbf{x = 5}$, $\mathbf{y = 1{,}5\cdot5 = 7{,}5}$. Пусть в стране В потребляется x единиц первого блага и $1{,}5x$ единиц второго блага. Найдем x из ограничения: $3x+1{,}5\cdot1{,}5x=42$, $5{,}25x=42$, $\mathbf{x=8}$, $\mathbf{y=1{,}5\cdot8=12}$.

   Страна А специализируется на производстве блага y (максимальный выпуск – 20), а страна В – на производстве блага x (максимальный выпуск – 14 единиц). При такой специализации выпускается недостаточное количество блага y ($20 < 21 = 14\cdot1{,}5$). Следовательно, в стране В взамен некоторого количества Δ блага x будет произведено благо y в объеме 2Δ. Суммарное производство благ тогда составит соответственно $(14 - \Delta)$ и $(20 + 2\Delta)$. Поскольку потребление блага y в 1,5 раза больше, выполняется равенство $(14-\Delta)\cdot1{,}5 = (20+2\Delta)$, $3{,}5\Delta=1$, $\Delta=2/7$. Таким образом, **объем производства в странах А и В составляет (0; 20) и $\mathbf{(13\frac{5}{7};\frac{4}{7})}$.**
3. Пропорция обмена соответствует середине интервала допустимых значений и равна $(2{,}5 + 2)/2 = 2{,}25$ единиц блага y за единицу блага x. Соответственно экономика А импортирует z единиц блага x, поставляя при этом $2{,}25z$ единиц блага y. При этом должно выполняться равенство:

   $$1{,}5z=20-2{,}25z,\ \ 3{,}75z=20,\ \ x = z = 5\frac{1}{3},\ \ y = 20 - 2{,}25\cdot 5\frac{1}{3} = 8.$$

   Потребление в экономике В составит

   $$x = 13\frac{5}{7} - 5\frac{1}{3} = 8\frac{8}{21},\ \ y = \frac{4}{7} + 2{,}25\cdot 5\frac{1}{3} = 12\frac{4}{7}.$$

   Значит, **объем потребления в странах А и В равен $\mathbf{(5\frac{1}{3}; 8)}$ и $\mathbf{(8\frac{8}{21}; 12\frac{4}{7})}$.**

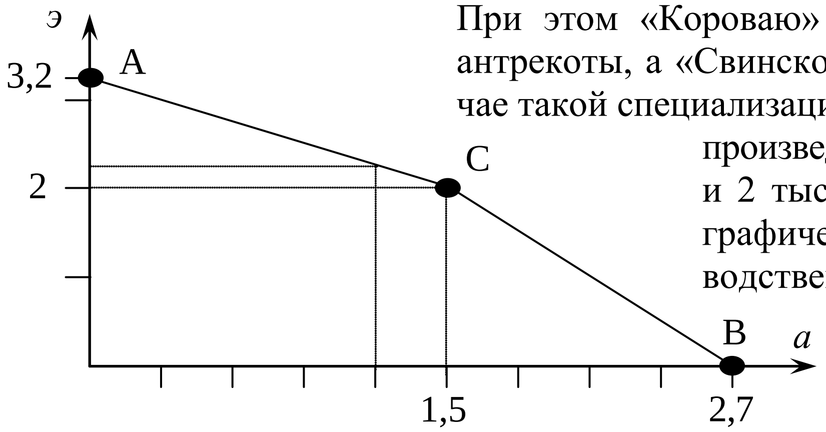
Задача 5.3*

Мясокомбинаты «Коровай» и «Свинский» производят антрекоты и эскалопы. «Коровай» может произвести 1,5 тыс. упаковок антрекотов в день, а альтернативные издержки производства антрекота постоянны и равны 0,8 эскалопа. Мясокомбинат «Свинский» может произвести 2 тыс. упаковок эскалопов в день, а альтернативные издержки производства эскалопа постоянны и равны 0,6 антрекота. Построить объединенное множество производственных возможностей. Если имеется спрос на 1,2 тыс. антрекотов, то какое количество эскалопов можно произвести совместно на объединенных производственных мощностях. Если цена эскалопа составляет 270 руб./кг., то при каких ценах на антрекоты мясокомбинатам будет выгодна специализация?

Решение:

Поскольку альтернативные издержки производства антрекота равны 0,8 эскалопа, максимальное производство эскалопов в «Коровае» составляет $1{,}5 \cdot 0{,}8 = 1{,}2$ тыс.шт. Аналогично, мясокомбинат «Свинский» может произвести $2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$ тыс. антрекотов. Следовательно, максимальное производство антрекотов на двух мясокомбинатах составляет $1{,}5 + 1{,}2 = 2{,}7$ тыс. упаковок, а максимальное производство эскалопов $1{,}2 + 2 = 3{,}2$ тыс. упаковок.

При этом «Короваю» выгоднее производить антрекоты, а «Свинскому» эскалопы. И в случае такой специализации ими совместно будет произведено 1,5 тыс. антрекотов и 2 тыс. эскалопов. Изобразим графически множество производственных возможностей.



Если имеется заказ на 1,2 тыс. антрекотов, то их всех может произвести «Коровай». Более того, $1{,}5 - 1{,}2 = 0{,}3$ тыс. антрекотов будет недовыпущено. Вместо них можно произвести $0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$ тыс. эскалопов. Мясокомбинат «Свинский» будет полностью специализироваться на производстве эскалопов в количестве 2 тыс. упаковок. Таким образом, суммарно будет произведено **2,24 тыс. экскалопов**.

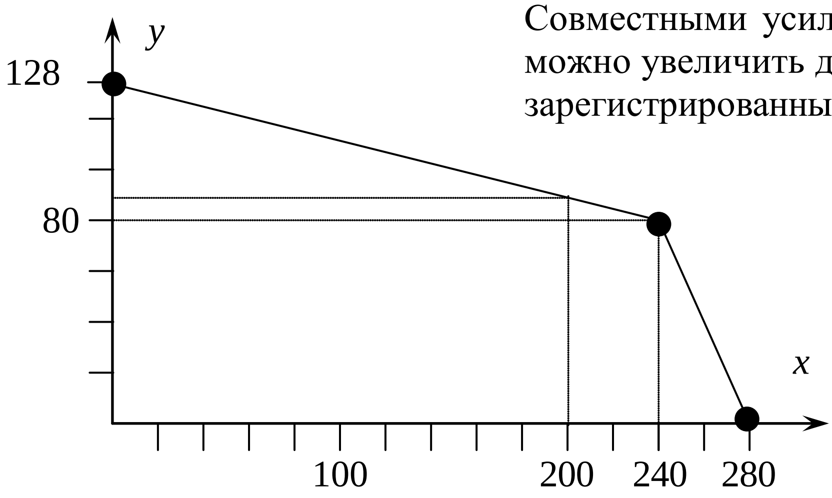
«Коровай» вместо 1 антрекота может производить 0,8 эскалопа, т.е. вместо 1 эскалопа $1/0{,}8 = 1{,}25$ антрекота. Однако, если антрекоты будут очень дешевыми (а именно, дешевле $270/1{,}25 = 216$ руб./кг), то их производство и специализация станут невыгодными для «Коровая». «Свинский» вместо 1 эскалопа в состоянии произвести всего 0,6 антрекота. Однако если антрекоты будут очень дорогими (а именно, дороже $270/0{,}6 = 450$ руб./кг), то «Свинскому» станет выгоден переход на их производство. Таким образом, специализация будет выгодна в диапазоне цены антрекота **от 216 до 450 руб./кг.**

Задача 5.4*

На рынке действуют фирма «Учетчик», бухгалтеры которой в состоянии подготовить налоговую декларацию за 2 ч каждый, и фирма «Регистратор», юристы которой подготовят пакет документов на регистрацию малого бизнеса за 4 ч каждый. Если бы бухгалтер регистрировал бизнесы, подготовка документов заняла бы у него 10 ч. В свою очередь, юрист может заполнить декларацию за 8 ч. Построить объединенное множество месячных производственных возможностей, если в «Учетчике» работают 3 бухгалтера, а в «Регистраторе» – 2 юриста (все работают 20 дней в месяц по 8 ч). Если в определенный месяц поступили заказы на подготовку 200 деклараций, сколько фирм в дополнение к этому смогут зарегистрировать «Учетчик» и «Регистратор» совместными усилиями? Если регистрация бизнеса стоит на рынке 2 тыс. руб., то при каких ценах подготовки налоговой декларации обеим фирмам будет выгодна специализация?

Решение:

Три бухгалтера, работающие в фирме «Учетчик», в состоянии подготовить за месяц $3{\cdot}20{\cdot}8/2 = 240$ налоговых деклараций. Если же они будут заниматься регистрацией фирм, то подготовят за месяц $3{\cdot}20{\cdot}8/10 = 48$ пакетов документов. Два юриста «Регистратора», в свою очередь, могут за месяц зарегистрировать $2{\cdot}20{\cdot}8/4 = 80$ фирм или подготовить $2{\cdot}20{\cdot}8/8 = 40$ деклараций.



Совместными усилиями число деклараций можно увеличить до $240 + 40 =$ **280**, а число зарегистрированных фирм – до $80+48=$**128**. Это будут две угловые точки множества производственных возможностей. Третьей будет точка идеальной специализации (все занимаются своим делом) – **240 деклараций и 80 регистраций**.

Если поступили заказы на 200 деклараций, то их целиком будет готовить фирма «Учетчик». Более того, на них будет потрачено всего $2{\cdot}200 = 400$ ч рабочего времени из имеющихся в распоряжении $3{\cdot}20{\cdot}8 = 480$ ч. За оставшиеся 80 ч бухгалтеры смогут зарегистрировать $80/10 = 8$ фирм в дополнение к 80 фирмам, зарегистрированных юристами «Регистратора». Таким образом, **общее число зарегистрированных фирм составит 88.**

Бухгалтеры заполняют декларации в 5 раз быстрее, чем регистрируют фирмы. Однако если декларация будет дешевле регистрации сильнее, чем в 5 раз (будет стоить меньше 400 руб.), то бухгалтеры будут регистрировать фирмы. Юристы заполняют декларацию в 2 раза дольше, чем регистрируют фирму. Однако если декларация будет дороже регистрации сильнее, чем в 2 раза (будет стоить больше 4000 руб.), юристы будут заполнять декларации. При цене регистрации **от 400 до 4000 руб. будет выгодна специализация.**

Задача 5.5*

На рынке действуют два олигополиста, которые могут сотрудничать или действовать исходя из собственных интересов. Соответствующие годовые прибыли (в млн руб.) в зависимости от выбранных стратегий приведены в следующей таблице:

фирма 1 / фирма 2	**сотрудничество**	**собственные интересы**
сотрудничество	$(140; 140)$	$(0; 220)$
собственные интересы	$(220; 0)$	$(105; 105)$

Если одна из фирм начинает действовать в собственных интересах, то другая больше не идет на сотрудничество. Определить, какая из стратегий будет оптимальной, если вероятность продолжения взаимодействия на каждый последующий год равна 80 %, а дисконтирующий множитель равен 0,9 (1 руб., полученный через год, равен сегодняшним 90 коп.).

Решение:

Если мы выбираем стратегию сотрудничества, то в первый год получаем 140 млн руб., во второй – с вероятностью 80 % 140 млн руб., которые для нас превратятся в 140·0,9=126 млн руб. и т.д. Если мы предпочитаем действовать в собственных интересах, то в первый год получаем 220 млн руб., во второй – с вероятностью 80 % 105 млн руб., которые для нас превратятся в 105·0,9=94,5 млн руб. и т.д. Сравним чистую текущую стоимость для данных двух вариантов:

$$NPV_1 = 140 + 0{,}8 \cdot 140 \cdot 0{,}9 + 0{,}8^2 \cdot 140 \cdot 0{,}9^2 + ... = 140/(1 - 0{,}8 \cdot 0{,}9) = 140/0{,}28 = 500.$$

$$NPV_2 = 220 + 0{,}8 \cdot 105 \cdot 0{,}9 + 0{,}8^2 \cdot 105 \cdot 0{,}9^2 + ... = 220 + 105 \cdot 0{,}72/(1 - 0{,}72) = 490.$$

Таким образом, каждой из фирм выгоднее **вести политику сотрудничества**, при которой они получат с учетом дисконтирования в среднем по **500 млн руб.**

Задача 5.6*

На пляже длиной 1 км равномерно распределены отдыхающие. Два киоска с мороженым находятся соответственно на расстоянии 400 м от левого края пляжа и 100 м от правого края пляжа (в точках $x = 0{,}4$ и $y = 0{,}9$). Отдыхающие покупают мороженое в ближайшем киоске.

1. Где нужно установить киоск третьему продавцу, чтобы в этих условиях максимизировать продажи?
2. Описать поведение третьего продавца, если киоски конкурентов установлены в произвольных точках x и y (на расстоянии x и y км от левого края пляжа соответственно, $x < y \in [0; 1]$).

Решение:

1. Если третий продавец установит киоск в точке $z = 0{,}4 - \varepsilon$ (очень близко к первому), все отдыхающие, находящиеся слева (их почти 40 %), покупают мороженое у него.
2. Если третий продавец установит киоск в точке $z = 0{,}9 + \varepsilon$ (очень близко ко второму), все отдыхающие, находящиеся справа (их почти 10 %), покупают мороженое у него.
3. Если третий продавец установит киоск в любой точке между первым и вторым, он получит ближайшую половину отдыхающих, находящихся посередине ($50\%/2 = 25\%$).

Следовательно, наилучшим вариантом является установка киоска в точке $\boldsymbol{z = 0{,}4 - \varepsilon}$ и обслуживание **40 % отдыхающих на пляже**.

В общем случае принципиально ничего не изменяется. Если установить третий киоск в точке $x-\varepsilon$, то можно получить долю x левых отдыхающих. Если установить третий киоск в точке $y+\varepsilon$, можно получить долю $(1-y)$ правых отдыхающих. Если же установить третий киоск между первым и вторым, то можно получить половину от находящихся посередине отдыхающих, т.е. долю, равную $(y-x)/2$.

Осталось сравнить доли между собой. Если $\boldsymbol{x > 1 - y}$, а также $x > (y-x)/2$, что эквивалентно $\boldsymbol{x > y/3}$, то третий киоск ставится **вплотную слева от первого**. Если $1 - y > x \Leftrightarrow \boldsymbol{y < 1 - x}$, а также $1 - y > (y-x)/2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y > (x+2)/3}$, то третий киоск ставится **вплотную справа от второго**. В противном случае третий киоск ставится **в произвольную точку между первым и вторым**.

Задача 5.7**

По соседству друг с другом находятся комбинат, производящий продукцию важного стратегического назначения в объеме q_1 тыс.шт., и курорт, обслуживающий туристов в количестве q_2 тыс. чел. Известно, что издержки производства на комбинате составляют $TC_1 = 2000 + 5q_1 + 0{,}01q_1^2 - 2q_2$ млн руб., а его продукция продается по цене 15 тыс. руб. за единицу. Спрос на услуги курорта описывается функцией $p = 70 - 0{,}4q_2 - 0{,}1q_1$ (тыс. руб.), а издержки обслуживания одного туриста составляют 10 тыс. руб.

1. Найти максимизирующее прибыли индивидуальное поведение комбината и курорта, а также поведение, наилучшее с точки зрения их объединения.
2. Найти налоги и субсидии Пигу, регулирующие внешние эффекты.
3. Найти величину неискажающих налогов и субсидий, а также чистого выигрыша общества от использования неискажающего налогообложения.

Решение:

Выпишем функции прибыли комбината и курорта и максимизируем их

$$\pi_1 = p_1 q_1 - TC_1 = 15q_1 - 2000 - 5q_1 - 0{,}01q_1^2 + 2q_2 \to \max_{q_1},$$

$$10 - 0{,}02q_1 = 0, \quad q_1 = 500.$$

$$\pi_2 = p_2 q_2 - TC_2 = 70q_2 - 0{,}4q_2^2 - 0{,}1q_1 q_2 - 10q_2 \to \max_{q_2},$$

$$60 - 0{,}8q_2 - 0{,}1 \cdot 500 = 0, \quad q_2 = 12{,}5, \quad p_2 = 70 - 0{,}4 \cdot 12{,}5 - 0{,}1 \cdot 500 = 15.$$

Сами прибыли комбината и курорта при этом составят

$$\pi_1 = 15 \cdot 500 - 2000 - 5 \cdot 500 - 0{,}01 \cdot 500^2 + 2 \cdot 12{,}5 = \mathbf{525\ млн\ руб.}$$

$$\pi_2 = 70 \cdot 12{,}5 - 0{,}4 \cdot 12{,}5^2 - 0{,}1 \cdot 500 \cdot 12{,}5 - 10 \cdot 12{,}5 = \mathbf{62{,}5\ млн\ руб.}$$

С точки зрения максимизации суммарной прибыли получим решение:

$$\pi = 15q_1 - 2000 - 5q_1 - 0{,}01q_1^2 + 2q_2 + 70q_2 - 0{,}4q_2^2 - 0{,}1q_1 q_2 - 10q_2 \to \max_{q_1, q_2},$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 10 - 0{,}02q_1 - 0{,}1q_2 = 0 \iff 80 - 0{,}16q_1 - 0{,}8q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 62 - 0{,}8q_2 - 0{,}1q_1 = 0.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим

$$18 - 0{,}06q_1 = 0, \quad q_1 = 300, \quad q_2 = (10 - 0{,}02 \cdot 300)/0{,}1 = 40,$$

$$p_2 = 70 - 0{,}4 \cdot 40 - 0{,}1 \cdot 300 = 24.$$

Прибыли комбината и курорта составят

$$\pi_1 = 15 \cdot 300 - 2000 - 5 \cdot 300 - 0{,}01 \cdot 300^2 + 2 \cdot 40 = \mathbf{180\ млн\ руб.}$$

$$\pi_2 = 70 \cdot 40 - 0{,}4 \cdot 40^2 - 0{,}1 \cdot 300 \cdot 40 - 10 \cdot 40 = \mathbf{560\ млн\ руб.}$$

Видим, что прибыль комбината сократилась, однако многократно возросла прибыль курорта. Суммарные прибыли при этом увеличились: 180 + 560 = **740** > **587,5** = 525 + 62,5.

Покажем, как с помощью налогов и субсидий Пигу можно регулировать внешние эффекты. Введем налог в размере t с единицы продукции комбината и субсидию s на каждого туриста, обслуживаемого курортом. Выберем их размер таким, чтобы попасть в общественно эффективное решение:

$$\pi_1 = 15q_1 - 2000 - 5q_1 - 0{,}01q_1^2 + 2q_2 - tq_1 \to \max_{q_1},$$

$$10 - t - 0{,}02q_1 = 0, \quad q_1 = 500 - 50t = 300, \quad \mathbf{t = 4}.$$

$$\pi_2 = 70q_2 - 0{,}4q_2^2 - 0{,}1q_1 q_2 - 10q_2 + sq_2 \to \max_{q_2}$$

$$60 + s - 0{,}8q_2 - 0{,}1 \cdot 300 = 0, \quad q_2 = (30 + s)/0{,}8 = 40, \quad \mathbf{s = 2}.$$

Введя налог ***t* = 4** и субсидию ***s* = 2**, мы заставили фирмы добровольно перейти в общественный оптимум. Однако при этом существенно изменились их прибыли. Найдем неискажающую субсидию S комбинату и неискажающий налог T с курорта, возвращающий прибыли на первоначальный уровень:

$$\pi_1 = 15 \cdot 300 - 2000 - 5 \cdot 300 - 0{,}01 \cdot 300^2 + 2 \cdot 40 - 4 \cdot 300 + S = 525, \quad \mathbf{S = 1545}.$$

$$\pi_2 = 70 \cdot 40 - 0{,}4 \cdot 40^2 - 0{,}1 \cdot 300 \cdot 40 - 10 \cdot 40 + 2 \cdot 40 - T = 62{,}5, \quad \mathbf{T = 577{,}5}.$$

Выигрыш общества от использования неискажающего налогообложения составит $\Delta W = tq_1 - sq_2 + T - S = 4 \cdot 300 - 2 \cdot 40 + 577{,}5 - 1545 =$ **152,5 млн руб.**

Задача 5.8*

Суточный спрос на проживание на двух соседних турбазах «Ковчег Байкала» и «Ветер странствий» выражается соответственно функциями $q_1 = 150 - 0{,}2p_1 + 0{,}1p_2$ и $q_2 = 250 - 0{,}15p_2 + 0{,}05p_1$, где p_1 и p_2 – цены проживания. Определить равновесные цены, если на «Ковчеге Байкала» размещается 90 чел., а на «Ветре странствий» – 140. Что произойдет, если «Ветер странствий» построит дополнительный коттедж на 20 чел.? Выгодно ли это базе? При каком количестве мест равновесная цена проживания на «Ветре странствий» станет ниже, чем на «Ковчеге Байкала»?

Решение:

Приравняем спрос и предложение (составляющее соответственно 90 и 140 чел.) для каждой из баз отдыха и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 150 - 0{,}2p_1 + 0{,}1p_2 = 90, \\ 250 - 0{,}15p_2 + 0{,}05p_1 = 140, \end{cases} \quad + \begin{cases} 225 - 0{,}3p_1 + 0{,}15p_2 = 135, \\ 250 - 0{,}15p_2 + 0{,}05p_1 = 140, \end{cases}$$

$$475 - 0{,}25p_1 = 275, \quad 0{,}25p_1 = 200,$$

$$p_1^* = \mathbf{800\ руб.}, \quad p_2^* = (0{,}2 \cdot 800 + 90 - 150)/0{,}1 = \mathbf{1000\ руб}.$$

Если «Ветер странствий» построит дополнительный коттедж на 20 чел., его предложение составит 160 чел. Решим модифицированную систему уравнений.

$$\begin{cases} 150 - 0{,}2p_1 + 0{,}1p_2 = 90, \\ 250 - 0{,}15p_2 + 0{,}05p_1 = 160, \end{cases} \quad + \begin{cases} 225 - 0{,}3p_1 + 0{,}15p_2 = 135, \\ 250 - 0{,}15p_2 + 0{,}05p_1 = 160, \end{cases}$$

$$475 - 0{,}25p_1 = 295, \quad 0{,}25p_1 = 180,$$

$$p_1^* = \mathbf{720\ руб.}, \quad p_2^* = (0{,}2 \cdot 720 + 90 - 150)/0{,}1 = \mathbf{840\ руб}.$$

Суточная выручка «Ветра странствий» при полной загрузке в исходной ситуации составляла 140·1 000 = **140 тыс. руб.**, а в новой – 160·840 = **134,4 тыс. руб.** Таким образом, произошло сокращение выручки при одновременном росте издержек (новый коттедж нужно построить). Без увеличения спроса **базе это невыгодно**.

Обозначим количество мест на «Ветре странствий» за x. Снова решим систему:

$$\begin{cases} 150 - 0{,}2p_1 + 0{,}1p_2 = 90, \\ 250 - 0{,}15p_2 + 0{,}05p_1 = x, \end{cases} \quad + \begin{cases} 225 - 0{,}3p_1 + 0{,}15p_2 = 135, \\ 250 - 0{,}15p_2 + 0{,}05p_1 = x, \end{cases}$$

$$475 - 0{,}25p_1 = 135 + x, \quad 0{,}25p_1 = 340 - x,$$

$$p_1^* = 1360 - 4x, \quad p_2^* = (0{,}2 \cdot (1360 - 4x) + 90 - 150)/0{,}1 = 2120 - 8x.$$

Найдем, при каких значениях x выполняется неравенство $p_2^* < p_1^*$:

$$2120 - 8x < 1360 - 4x \quad 4x > 760, \quad x > 190.$$

Если на «Ветре странствий» будет **больше 190 мест**, цена станет ниже, чем на «Ковчеге Байкала»

Задача 5.9*

Рынок мороженого в Иркутске характеризуется годовым спросом $q_D = 10 - 0{,}2p$ (здесь p – цена, руб., q – объем продаж, млн шт.). Все производители мороженого имеют одинаковые функции суммарных издержек $TC(q) = 20 + 5q^2$ (млн руб.). Сколько фирм ожидается на этом рынке при совершенной конкуренции в долгосрочном периоде – каждая фирма имеет неотрицательную прибыль и нет стимулов для входа дополнительных фирм? Какая установится на рынке цена и каков будет объем продаж?

Решение:

Условие максимизации прибыли для рынка совершенной конкуренции записывается в виде $p = MC(q) = TC'(q) = 10q$. Отсюда оптимальный объем производства одной фирмы в зависимости от цены составит $q = 0{,}1p$. Поскольку в отрасли находится n таких фирм, суммарный объем производства будет равен $Q = nq = 0{,}1np$.

Этот объем производства должен покрывать спрос: $Q = 10 - 0{,}2p$. Значит,

$$10 - 0{,}2p = 0{,}1np, \quad p = \frac{100}{n+2}, \quad q = \frac{10}{n+2}.$$

Проверим, при каком числе фирм у них будет неотрицательная прибыль.

$$\pi = TR(q) - TC(q) = pq - \left(20 + 5q^2\right) = \frac{100}{n+2}\frac{10}{n+2} - 5\left(\frac{10}{n+2}\right)^2 - 20 \ge 0,$$

$$\left(\frac{10}{n+2}\right)^2 \ge 4, \quad \frac{10}{n+2} \ge 2, \quad n \le 3, \quad p = \frac{100}{3+2} = 20, \quad q = \frac{10}{3+2} = 2, \quad Q = 2 \cdot 3 = 6.$$

Таким образом, на рынке будет присутствовать **3 фирмы**, каждая из которых будет производить **по 2 млн порций** мороженого и продавать их **по 20 руб.**

Замечание: поскольку каждая из 3 фирм будет получать в точности нулевую прибыль, возможен вариант, что на рынке останется 2 фирмы, каждая из которых будет производить по $q = 10/(2+2) = 2{,}5$ млн порций и продавать их по $100/(2+2) = 25$ руб.

Задача 5.10*

Месячный спрос на бананы на Иркутском рынке выражается функцией $Q = 100 - p$ (т), где p – цена, руб./кг. Рынок поделен между поставщиком бананов из Эквадора (их себестоимость составляет 10 руб./кг) и из Бодайбо (40 руб./кг). Найти точку равновесия Курно. Что изменится, если в результате плохих погодных условий себестоимость бодайбинских бананов увеличится до 60 руб./кг?

Решение:

Пусть поставщик бананов из Эквадора привозит их в количестве q_1, а поставщик бананов из Бодайбо – в количестве q_2. Суммарные поставки будут равны $Q = q_1 + q_2$, а цена $p = 100 - Q = 100 - q_1 - q_2$. Прибыли составят соответственно

$$\pi_1 = pq_1 - 10q_1 = (100 - q_1 - q_2)q_1 - 10q_1 = 90q_1 - q_1^2 - q_1q_2 \to \max_{q_1},$$

$$\pi_2 = pq_2 - 40q_2 = (100 - q_1 - q_2)q_2 - 40q_2 = 60q_2 - q_2^2 - q_1q_2 \to \max_{q_2}.$$

Приравняв частные производные к нулю, найдем кривые реакции (оптимальные отклики каждого поставщика на поставки конкурентов):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 90 - 2q_1 - q_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 60 - 2q_2 - q_1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90 - 2q_1 - q_2 = 0, \\ 120 - 2q_1 - 4q_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 30 - 3q_2 = 0.$$

Отсюда $q_2 = \mathbf{10}$ **(т),** $q_1 = 60 - 2 \cdot 10 = \mathbf{40}$ **(т),** $Q = 40 + 10 = \mathbf{50}$ **(т),** $p = \mathbf{50}$ **(руб.).**

При повышении себестоимости бодайбинских бананов до 60 руб. функция прибыли примет вид

$$\pi_2 = pq_2 - 60q_2 = (100 - q_1 - q_2)q_2 - 60q_2 = 40q_2 - q_2^2 - q_1q_2 \to \max_{q_2},$$

а кривая реакции может быть найдена из условия

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 40 - 2q_2 - q_1 = 0 \Leftrightarrow 80 - 2q_1 - 4q_2 = 0.$$

Решив систему

$$\begin{cases} 90 - 2q_1 - q_2 = 0, \\ 80 - 2q_1 - 4q_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 10 + 3q_2 = 0,$$

получим, что $q_2 = -10/3 < 0$. Следовательно, поставщику из Бодайбо вообще **нет смысла выходить на рынок**. Если же $q_2 = 0$ и поставщик эквадорских бананов становится монополистом, его оптимальный объем поставок будет равен (из кривой реакции) $q_1 = 90/2 = \mathbf{45}$ **(т)**, а цена $p = 100 - 45 = \mathbf{55}$ **(руб.)**.

Задача 5.11*

На рынке со спросом $p = 110 - 0{,}5Q$ присутствуют 2 фирмы, производящие продукцию с издержками $TC_i = 0{,}5q_i^2$. Найти равновесие в условиях модели Курно (количественной олигополии, в которой каждая фирма максимизирует прибыль, ориентируясь на объемы продаж конкурента). Что произойдет, если одна из фирм станет ценополучателем, т.е. будет определять свои объемы поставок, ориентируясь исключительно на сложившуюся на рынке цену? Выиграет она или проиграет при использовании такой стратегии?

Решение:
В модели Курно каждая фирма максимизирует свою прибыль, ориентируясь на объемы продаж конкурента:

$$\pi_1 = pq_1 - TC_1 = (110 - 0{,}5(q_1 + q_2))q_1 - 0{,}5q_1^2 = 110q_1 - q_1^2 - 0{,}5q_1q_2 \to \max_{q_1},$$

$$110 - 2q_1 - 0{,}5q_2 = 0, \quad q_1 = 55 - 0{,}25q_2.$$

Поскольку фирмы одинаковые и пользуются одинаковыми стратегиями, то из соображений симметрии $q_2 = 55 - 0{,}25q_1$. Решив полученную систему уравнений, получим

$$q_1 = q_2 = \mathbf{44}, \quad Q = \mathbf{88}, \quad p = 110 - 0{,}5 \cdot 88 = \mathbf{66},$$

$$\pi_1 = \pi_2 = 66 \cdot 44 - 0{,}5 \cdot 44^2 = \mathbf{1936}.$$

Если первая фирма действует как ценополучатель, она выбирает объемы поставок из условия $p = MC_1 = TC_1' = q_1$:

$$110 - 0{,}5(q_1 + q_2) = q_1, \quad q_1 = (110 - 0{,}5q_2)/1{,}5.$$

Решим систему уравнений и найдем объемы поставок каждой из фирм:

$$\begin{cases} q_1 = (110 - 0{,}5q_2)/1{,}5, \\ q_2 = 55 - 0{,}25q_1. \end{cases}$$

$$1{,}5q_1 = 110 - 0{,}5(55 - 0{,}25q_1) = 110 - 27{,}5 + 0{,}125q_1,$$

$$q_1 = 82{,}5/1{,}375 = \mathbf{60}, \quad q_2 = 55 - 0{,}25 \cdot 60 = \mathbf{40}, \quad Q = 60 + 40 = \mathbf{100}.$$

Вычислим цену, которая сложится на рынке, а также прибыли фирм:

$$p = 110 - 0{,}5 \cdot 100 = \mathbf{60},$$

$$\pi_1 = 60 \cdot 60 - 0{,}5 \cdot 60^2 = \mathbf{1800}, \quad \pi_2 = 60 \cdot 40 - 0{,}5 \cdot 40^2 = \mathbf{1600}.$$

Видим, что **прибыли первой фирмы** в результате применения новой стратегии **сократились** из-за чрезмерного увеличения объема поставок и снижения рыночной цены.

Задача 5.12*

На рынке со спросом $Q_D = 300 - 3p$ (p – цена, руб., Q – объем продаж, тыс. шт.) работают 10 одинаковых фирм, суммарные издержки каждой из которых заданы в виде $TC(q) = q^2 + 20q + 100$. 4 фирмы объединяются в картель для максимизации прибыли, а остальные 6 формируют конкурентное окружение. Найти объемы продаж каждой из фирм картеля и конкурентного окружения, а также цену, сложившуюся на рынке.

Решение:
Пусть на рынке установилась цена p. Тогда каждая из фирм конкурентного окружения будет поставлять объем продукции q_1, максимизирующий ее прибыль:

$$\pi_1 = pq_1 - q_1^2 - 20q_1 - 100 \to \max_{q_1}, \quad p - 2q_1 - 20 = 0, \quad q_1 = 0{,}5p - 10.$$

В совокупности 6 таких фирм поставят на рынок объем продукции $Q_1 = 6q_1 = 6(0{,}5p - 10) = 3p - 60$. Картелю в этом случае достается спрос $Q_k = Q_D - Q_1 = 300 - 3p - 3p + 60 = 360 - 6p$. Поскольку в картель входят 4 одинаковые фирмы, каждой из них достается одинаковый объем поставок $q_k = Q_k/4 = 90 - 1{,}5p$, что эквивалентно условию $p = 60 - 2/3q_k$. Найдем, при какой цене прибыль фирмы картеля будет максимальна:

$$\pi_k = \left(60 - \frac{2}{3}q_k\right)q_k - q_k^2 - 20q_k - 100 = -\frac{5}{3}q_k^2 + 40q_k - 100 \to \max_{q_k}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$-10/3q_k + 40 = 0,\ q_k = \mathbf{12},\ p = 60 - 2/3 \cdot 12 = \mathbf{52},\ q_1 = 0{,}5 \cdot 52 - 10 = \mathbf{16}.$$

Задача 5.13*

На рынке однородного товара со спросом $Q = 1200 - p$ действует устанавливающая цену фирма-лидер, характеризующаяся более низкими издержками $TC_0(q_0) = q_0^2 + 300q_0 + 2000$, и 5 фирм конкурентного окружения, чьи издержки производства равны $TC_i(q_i) = 5q_i^2 + 300q_i + 2000$.

1. Какую цену установит лидер с целью максимизации прибыли? Какими будут объемы поставок лидера и конкурентов? Чему равны их прибыли?
2. Смогут ли на рынке помимо лидера разместиться не 5, а 30 фирм конкурентного окружения?

Решение:

1. Пусть лидер устанавливает цену *p*. Тогда каждый из конкурентов принимает решение об объемах поставок из условия $p = MC_i = 10q_i + 300$, откуда $q_i = (p - 300)/10$. Поскольку таких фирм 5, их суммарные продажи составят $Q_i = 5q_i = 0{,}5p - 150$, а остаточный спрос на продукцию лидера окажется равным $q_0 = Q - Q_i = (1200 - p) - (0{,}5p - 150) = 1350 - 1{,}5p$, что эквивалентно $p = 900 - 2/3q_0$. Максимизируем функцию прибыли лидера:

$$\pi_0 = (900 - 2/3\,q_0)q_0 - q_0^2 - 300q_0 - 2000 = 600q_0 - 5/3\,q_0^2 - 2000 \to \max,$$

$$600 - 10/3q_0 = 0,\ q_0 = 180,\ p = 900 - 2/3 \cdot 180 = 780,\ q_i = (780 - 300)/10 = 48,$$

$$\pi_0 = 780 \cdot 180 - 180^2 - 300 \cdot 180 - 2000 = 52\,000,$$

$$\pi_i = 780 \cdot 48 - 5 \cdot 48^2 - 300 \cdot 48 - 2000 = 9\,520.$$

2. Для 30 конкурентных фирм, все вычисления будут такими же с одной поправкой: $Q_i = 30q_i = 3p - 900$, $q_0 = Q - Q_i = 2100 - 4p$, $p = 525 - 0{,}25q_0$.

$$\pi_0 = (525 - 0{,}25q_0)q_0 - q_0^2 - 300q_0 - 2000 = 225q_0 - 1{,}25q_0^2 - 2000 \to \max,$$

$$225 - 2{,}5q_0 = 0,\ q_0 = 90,\ p = 525 - 0{,}25 \cdot 90 = 502{,}5,\ q_i = (502{,}5 - 300)/10 = 20{,}25,$$

$$\pi_i = 502{,}5 \cdot 20{,}25 - 5 \cdot 20{,}25^2 - 300 \cdot 20{,}25 - 2000 = 50{,}3125 > 0.$$

Поскольку прибыли фирм конкурентного окружения, хоть и небольшие, но находятся в положительной области, **фирмы войдут на рынок**.

Задача 5.14*

Спрос на рынке таблеток от счастья задан функцией $p = 7 - 2q$, где p – цена, тыс. руб., q – объем продаж, млн упаковок в год. Производством занимается компания, имеющая производственные мощности K (позволяющие выпускать $q = K$ млн упаковок лекарства). Цена покупки единицы мощностей равна 1 тыс. руб., а издержки производства единицы продукции – 2 тыс. руб. На рынок собирается выйти конкурент с такими же издержками, у которого, однако, производственные мощности еще не приобретены. В случае его входа будет происходить конкуренция по Курно. Найти точку равновесия.

Выгодно ли монополисту введение годовой лицензии стоимостью 800 млн руб. (которую должен будет платить как он сам, так и потенциальный конкурент)? Почему? Если выгодно, то какую сумму он готов потратить на лоббирование этого решения?

Решение:

Отличия компаний заключаются в том, что одна (лидер) уже имеет производственные мощности K (и их стоимость которых в постоянные издержки), а вторая (конкурент) еще нет (их стоимость включается в переменные издержки). Выпишем функции прибыли компаний, обозначив индексами 1 и 2 лидера и конкурента:

$$\pi_1 = (7 - 2(q_1 + q_2))q_1 - 2q_1 - K \to \max_{q_1 \in [0;K]}, \; 7 - 4q_1 - 2q_2 - 2 = 0, \; q_1 = 1{,}25 - 0{,}5q_2,$$

$$\pi_2 = (7 - 2(q_1 + q_2))q_2 - 2q_2 - q_2 \to \max_{q_2}, \; 7 - 2q_1 - 4q_2 - 3 = 0, \; q_2 = 1 - 0{,}5q_1.$$

Если производственные мощности K достаточны, равновесие можно найти, решив полученную систему: $q_1{*} = 1, q_2{*} = 0{,}5, Q{*} = 1{,}5, p{*} = 4, \pi_1{*} = 2 - K, \pi_2{*} = 0{,}5$.

Если производственные мощности K<1, они будут задействованы по полной: $q_1{*} = K, \; q_2{*} = 1 - 0{,}5K, \; Q{*} = 1 + 0{,}5K, \; p{*} = 5 - K, \; \pi_1{*} = 2K - K^2, \; \pi_2{*} = 0{,}5K^2 - 2K + 2$.

При этом прибыль лидера окажется меньше, чем при K=1. Следовательно, вторая стратегия не будет реализована.

Если конкурент не входит на рынок, лидер устанавливает монопольную цену в точности посередине между издержками $c + r = 1+2 = 3$ и максимально возможной ценой на рынке $p_{\max} = 7$, т.е. $p{*} = (3+7)/2 = 5$. По этой цене он продает $q{*} = (7-5)/2 = 1$ млн упаковок и получает прибыль $\pi{*} = (5–3)\cdot 1 = 2$ млрд руб.

Заметим, что без введения лицензии конкурент всегда входит на рынок, и максимально возможная прибыль лидера составляет 1 млрд руб. В то же время, поскольку прибыль конкурента при $K \geq 1$ не превышает 0,5 млрд руб., лицензия свыше 500 млн руб. (в том числе, 800 млн руб.) оставляет лидера монополистом. Из дополнительно заработанного миллиарда лидер **готов заплатить** 800 млн руб. за лицензию, и **потратить сумму в пределах 200 млн руб.** на лоббирование этого решения.

Задача 5.15**

В Булкина-Фасовске работает несколько пекарен, покрывающих суммарный спрос на хлеб в размере $p = 55 - Q$, где p – цена булки, руб., Q – объем продаж, тыс. шт. Издержки производства одинаковы для всех пекарен и составляют $TC(q_i) = 25 + 15q_i$ (тыс. руб.). Пекарни конкурируют по Курно (выбирают оптимальный объем поставок, ориентируясь на поставки конкурентов). Найти, сколько пекарен сможет разместиться на таком рынке, какими будут равновесные объемы производства и цены. Каково будет общественно эффективное количество фирм, максимизирующее сумму потребительского излишка и прибылей пекарен?

Решение:

Выпишем функцию прибыли каждой из пекарен и максимизируем ее:

$$\pi_i = pq_i - TC(q_i) = \left(55 - q_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} q_j\right) q_i - 15q_i - 25 \to \max_{q_i},$$

$$40 - 2q_i - \sum q_j = 0.$$

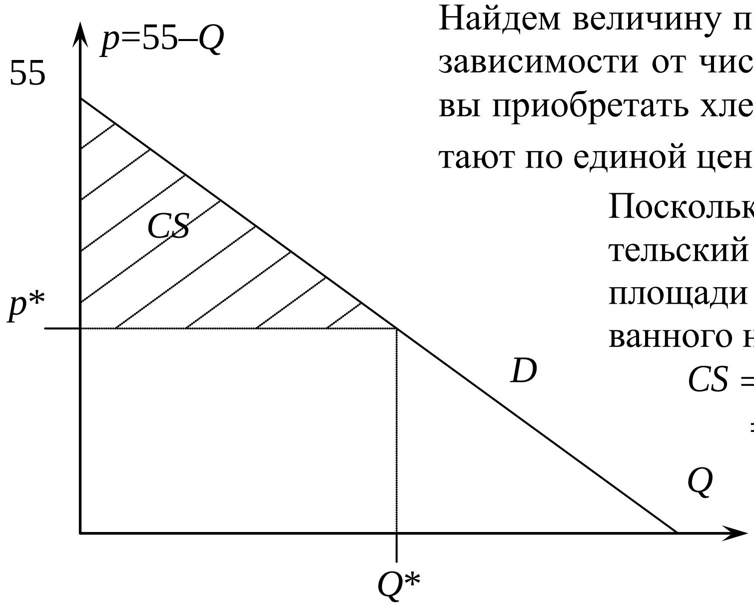
Поскольку все пекарни одинаковы и в точке равновесия $q_1 = \ldots = q_n = q$, из равенства $40 - 2q - (n-1)q = 0$ получим:

$$q^* = \frac{40}{n+1}, \quad Q^* = nq^* = \frac{40n}{n+1}, \quad p^* = 55 - \frac{40n}{n+1} = 15 + \frac{40}{n+1},$$

$$\pi^* = \left(15 + \frac{40}{n+1}\right)\frac{40}{n+1} - 15\frac{40}{n+1} - 25 = \left(\frac{40}{n+1}\right)^2 - 25 \geq 0,$$

$$\frac{40}{n+1} \geq 5, \quad n^* \leq 7.$$

Таким образом, в равновесии на рынке окажется **7 пекарен**, выпекающих по ***q**=5 тыс. булок хлеба** в день (всего **35 тыс. булок**), продающих их **по цене *p**=20 руб.** и в точности покрывающих свои издержки (**π^*=0**).



Найдем величину потребительского излишка в зависимости от числа фирм. Покупатели готовы приобретать хлеб по $p = 55 - Q$, а приобретают по единой цене $p^* = 55 - 40n/(n+1)$.

Поскольку спрос линеен, потребительский излишек равен просто площади треугольника, заштрихованного на представленном рисунке:

$$CS = 0{,}5(55 - p^*)Q^* = \\ = 0{,}5 \cdot 40n/(n+1) \cdot 40n/(n+1).$$

Сложим потребительский излишек CS с суммарной прибылью всех пекарен $n\pi^*$ и максимизируем данное выражение по n:

$$CS+n\pi^*=\frac{800n^2}{(n+1)^2}+\frac{1600n}{(n+1)^2}-25n=800-\frac{800}{(n+1)^2}-25n\to\max_n,$$

$$\frac{1600}{(n+1)^3}-25=0,\quad (n+1)^3=64,$$

$$n^{**}=3,\quad q^{**}=10,\quad Q^{**}=30,\quad p^{**}=25,\quad \pi^{**}=75.$$

Следовательно, идеальным для общества было бы наличие **3 пекарен**, каждая из которых выпекала бы по ***q***=10 тыс. булок хлеба**, продавала их **по цене *p***=25 руб.** и получала прибыль ***π**=75 тыс. руб.**

Задача 5.16*

Продажу апельсинов на рынке с суточным спросом $q_D=1000-20p$ (p – цена, руб., q – объем продаж, кг), контролирует фирма «Яблокитай». Однажды на рынке появляется конкурент-однодневка, предлагающий сделку: он быстро продает 120 кг апельсинов по 20 руб., после чего фирма «Яблокитай» остается монополистом на остаточном спросе. Альтернативой является продажа фирмой «Яблокитай» апельсинов по цене не дороже 20 руб. Тогда конкурент в борьбу не вступает. Определить экономически оптимальное поведение и прибыль фирмы «Яблокитай» в этих условиях, если себестоимость 1 кг апельсинов для нее составляет 10 руб. Считать, что покупать дешевые апельсины у конкурента будут случайно подошедшие покупатели.

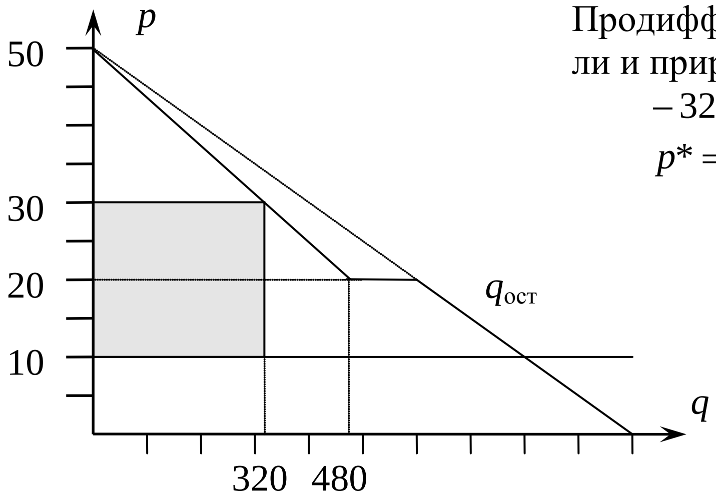
Решение:

Рассмотрим обе альтернативы. Первая состоит в том, чтобы продавать апельсины по цене, не дороже, чем у конкурента: $p=20$ руб. Тогда покрывается весь рыночный спрос $q_D=1000-20p=1000-20\cdot 20=600$ кг. Прибыль от продажи 1 кг составит $20-10=10$ руб., а суммарная прибыль

$$\pi_1=10\cdot 600=6000 \text{ руб.}$$

Вторая альтернатива состоит в допущении конкурента на рынок и последующем извлечении монопольной прибыли на остаточном спросе. По цене $p=20$ объем спроса составляет $q_D=1000-20\cdot 20=600$ кг. Из них 120 кг, т.е. 20 %, продает конкурент. Поскольку дешевые апельсины покупают случайно подошедшие покупатели, то остаточный спрос составит при любой цене, начиная с 20 руб., 80 % от первоначального. $q_{\text{ост}}=0{,}8(1000-20p)=800-16p$. На нем будет максимизировать свою прибыль фирма «Яблокитай». Прибыль от продажи 1 кг апельсинов составит $(p-10)$ руб. при объеме продаж $(800-16p)$ кг. Суммарная прибыль равна

$$\pi_2=(p-10)(800-16p)=-16p^2+960p-8000\to\max.$$



Продифференцируем функцию прибыли и приравняем производную к нулю:

$$-32p + 960 = 0,$$

$$p^* = 30, \ q^* = 320, \ \pi_2 = 6400.$$

Поскольку $\pi_2 > \pi_1$, фирме «Яблокитай» выгоднее **допустить конкурента** на рынок, но **продавать апельсины по монопольной цене.**

Задача 5.17**

Продажу винограда на рынке с суточным спросом $q_D = 2000 - 20p$ контролирует фирма «Кишмиш». Однажды на рынке появляется конкурент, предлагающий сделку: он быстро продает 400 кг винограда по 50 руб., после чего фирма «Кишмиш» остается монополистом на остаточном спросе. Альтернативой является продажа винограда по цене не выше 50 руб. Тогда конкурент в борьбу не вступает.

1. Определить экономически оптимальное поведение и прибыль фирмы «Кишмиш» в этих условиях, если себестоимость 1 кг винограда для нее составляет 40 руб. Считать, что покупать дешевый виноград у конкурента будут случайно подошедшие покупатели (остаточный спрос пропорционален суммарному).
2. Может ли конкурент увеличить свои прибыли, управляя своей ценой и объемом поставок? Себестоимость винограда для него также составляет 40 руб./кг.

Решение:

1. Рассмотрим обе альтернативы. Первая состоит в том, чтобы продавать виноград не дороже конкурента: $p = 50$ руб. Тогда покрывается весь рыночный спрос $q_D = 2000 - 20 \cdot 50 = 1000$ кг. Прибыль от продажи 1 кг составит 10 руб., а суммарная прибыль $\pi_1 = 10 \cdot 1000 = 10\,000$ руб.

   Вторая альтернатива состоит в допущении конкурента на рынок и последующем извлечении монопольной прибыли на остаточном спросе. По цене $p = 50$ объем спроса составляет 1000 кг. Из них 400 кг, т.е. 40 %, продает конкурент. Поскольку дешевый виноград покупают случайно подошедшие покупатели, то остаточный спрос составит при любой цене, начиная с 50 руб., 60 % от первоначального. $q_{ост} = 0{,}6(2000 - 20p) = 1200 - 12p$.

   Прибыль от продажи 1 кг винограда составит $(p - 40)$ руб. Максимизируем суммарную прибыль:

$$\pi_2 = (p - 40)(1200 - 12p) = -12p^2 + 1680p - 48\,000 \to \max,$$

Продифференцируем прибыль и приравняем производную к нулю:

$$\pi_2' = 1680 - 24p = 0, \quad p^* = 70, \quad q^* = 1200 - 12 \cdot 70 = 360,$$

$$\pi_2 = 30 \cdot 360 = 10\,800 \text{ руб.}$$

Поскольку $\pi_2 > \pi_1$, фирме «Кишмиш» выгоднее **допустить конкурента** на рынок, но **продавать виноград по монопольной цене**.

2. Конкурент в рассмотренном примере продает 400 кг винограда, получая с каждого килограмма прибыль в размере 10 руб. Таким образом, его суммарная прибыль составляет 4000 руб. Для ее увеличения необходимо как минимум, чтобы фирме «Кишмиш» было выгодно пустить конкурента на рынок.

Пусть конкурент предлагает виноград в объеме K по цене p. Если «Кишмиш» не хочет допустить его на рынок, он должен продавать виноград по цене p в объеме $q = 2000 - 20p$, получая при этом прибыль

$$\pi_1 = (p-40)(2000 - 20p) = 2\,800\,p - 20p^2 - 80\,000.$$

Если же «Кишмиш» ради монопольной цены 70 руб./кг и удельной прибыли 30 руб./кг готов впустить конкурента, тот займет долю рынка $K/(2000-20p)$. При цене винограда 70 руб. суммарный спрос составит 2000 – 20·70 = 600 кг. Остаточный спрос, достающийся «Кишмишу», равен $q_{\text{ост}} = 600 \cdot (1 - K/(2000 - 20p))$, а соответствующая прибыль равна

$$\pi_2 = 30 \cdot 600 \cdot (1 - K/(2000 - 20p)).$$

Поскольку для конкурента необходимо выполнение условия $\pi_2 \geq \pi_1$, найдем максимально возможный объем поставок K при произвольной цене p (неравенство в этом случае будет выполняться как равенство):

$$18\,000 \cdot (1 - K/(2\,000 - 20p)) = 2\,800p - 20p^2 - 80\,000,$$

$$\frac{-18\,000K}{2\,000 - 20p} = 2\,800p - 20p^2 - 98\,000,$$

$$K = (100 - p)(p^2 - 140p + 4\,900)/45.$$

Теперь максимизируем прибыль конкурента

$$\pi = (p-40)K = (p-40)(100-p)(p^2 - 140p + 4\,900)/45 \to \max,$$

$$\pi = -(p^2 - 140p + 4\,000)(p^2 - 140p + 4\,900)/45 \to \max,$$

$$\pi = -((p^2 - 140p + 4\,450) - 450)((p^2 - 140p + 4\,450) + 450)/45 \to \max,$$

$$(p^2 - 140p + 4450)^2 - 450^2 \to \min.$$

При минимизации функции константа не влияет на результат:

$$(p^2 - 140p + 4450)^2 \to \min, \quad p^2 - 140p + 4450 = 0.$$

$$D = 70^2 - 4450 = 450, \; p = 70 - \sqrt{450} \approx 48{,}79,$$

$$K \approx 512{,}13, \; \pi = 450^2/45 = 4500.$$

Ответ. Максимально возможная прибыль конкурента составляет **4500 руб.**

Задача 5.18**

На рынке некоторого товара, спрос на который составляет $q_D = 1 - p$, действуют 2 одинаковые фирмы с издержками производства $TC(q) = q^2/2$. Построить кривые реакции и найти равновесие, если фирмы функционируют в условиях конкуренции по Бертрану (стратегической переменной является цена; все покупатели покупают товар у того производителя, у которого он дешевле; в случае одинаковых цен рынок делится пополам; производитель обязан покрыть весь рыночный спрос).

Решение:

Рассмотрим возможное поведение первой фирмы в зависимости от цены, установленной второй. У первой фирмы есть 3 альтернативы:

1. $p_1 > p_2 \;\Rightarrow\; q_1 = 0,\; \pi_1 = 0$ – уход с рынка;
2. $p_1 = p_2 \;\Rightarrow\; q_1 = q_2 = Q/2$ – дележ рынка пополам;
3. $p_1 < p_2 \;\Rightarrow\; q_1 = Q$ – захват рынка.

В последней ситуации нет смысла устанавливать цену существенно ниже, чем у конкурента. Если цена будет даже на копейку ниже, по условиям задачи захват рынка можно считать осуществленным. Поэтому можно считать, что $p_1 = p_2 - \Delta \approx p_2$. Обозначим эту цену $p = 1 - Q$.

Подсчитаем прибыли первой фирмы в ситуациях 2 и 3:

2. $\pi_2 = p\dfrac{Q}{2} - \left(\dfrac{Q}{2}\right)^2 \Big/ 2 = \dfrac{(1-Q)Q}{2} - \dfrac{Q^2}{8} = \dfrac{Q}{2} - \dfrac{5Q^2}{8}$;

3. $\pi_3 = pQ - \dfrac{Q^2}{2} = (1-Q)Q - \dfrac{Q^2}{2} = Q - \dfrac{3Q^2}{2}$.

Обе функции представляют собой параболы с ветвями, направленными вниз. Найдем вершины каждой из них, приравняв производные к нулю:

2. $\left(\dfrac{Q}{2} - \dfrac{5Q^2}{8}\right)' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{4}Q = 0, \quad Q = \dfrac{2}{5}, \; \pi_2^{\max} = \dfrac{2/5}{2} - \dfrac{5(2/5)^2}{8} = \dfrac{1}{10}$

3. $\left(Q - \dfrac{3Q^2}{2}\right)' = 1 - 3Q = 0, \quad Q = \dfrac{1}{3}, \; \pi_3^{\max} = 1/3 - \dfrac{3(1/3)^2}{2} = \dfrac{1}{6}$

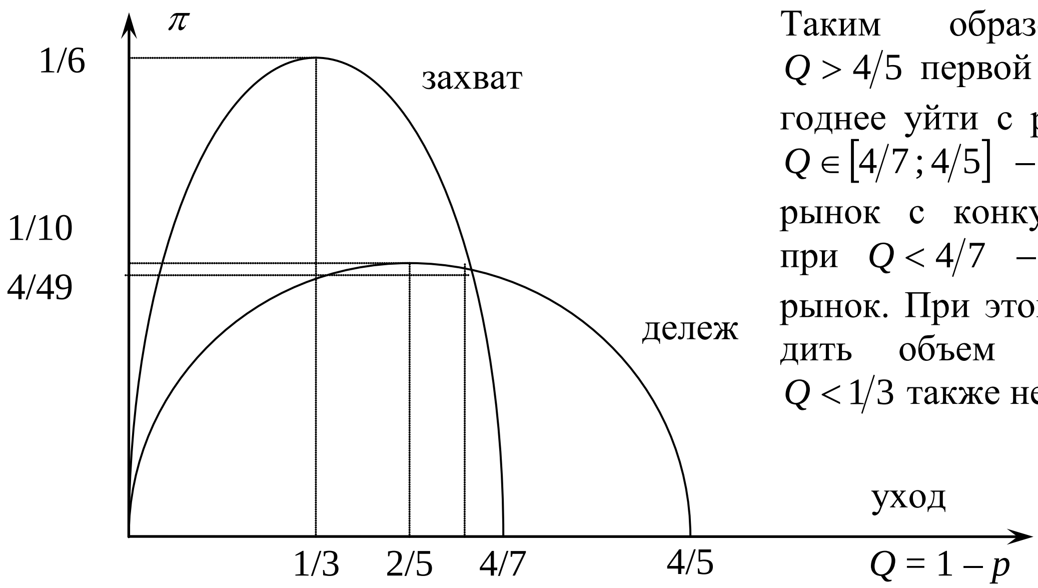
Найдем точку, в которой выгодно начинать делить рынок: $\pi_2 = \pi_3$:

$$\frac{Q}{2} - \frac{5Q^2}{8} = Q - \frac{3Q^2}{2}, \quad \frac{7Q^2}{8} = \frac{Q}{2}, \quad 7Q - 4 = 0, \quad Q = \frac{4}{7}.$$

Найдем точку, в которой выгоднее уходить с рынка: $\pi_2 = 0$:

$$\frac{Q}{2} - \frac{5Q^2}{8} = 0, \quad 4 - 5Q = 0, \quad Q = \frac{4}{5}.$$

Схематически зависимость прибыли от объема производства в каждой из трех ситуаций (уход с рынка, дележ рынка и захват рынка) изображена на графике.

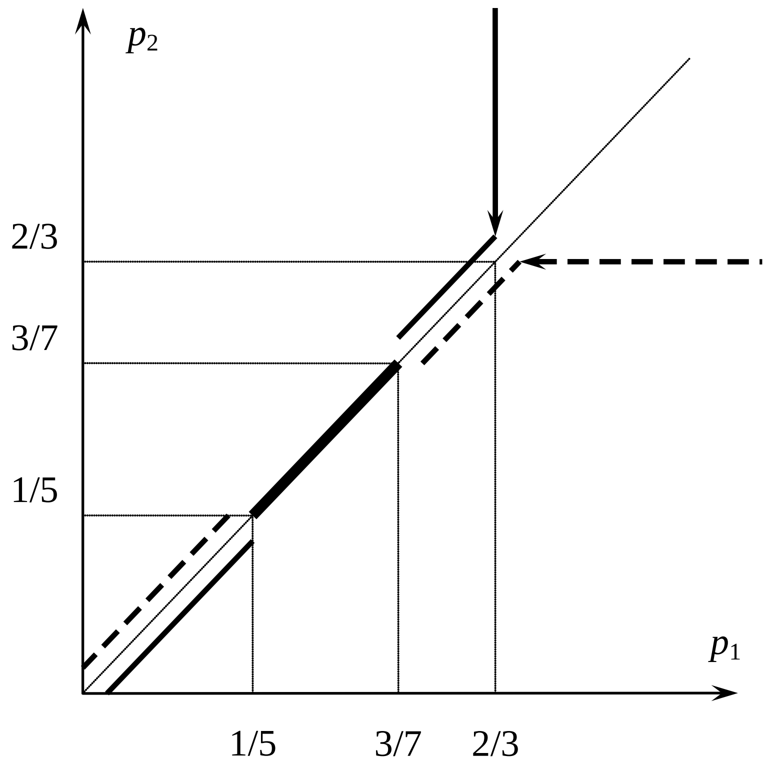


Таким образом, при $Q > 4/5$ первой фирме выгоднее уйти с рынка, при $Q \in [4/7\,;4/5]$ – разделить рынок с конкурентом, а при $Q < 4/7$ – захватить рынок. При этом производить объем продукции $Q < 1/3$ также невыгодно.

Перейдем обратно в систему координат, зависящую от цены конкурента $p_2 = 1 - Q$:

1. $p_2 < 1/5 \;\Rightarrow\; p_1 > p_2$, $q_1 = 0$, $\pi_1 = 0$ – уход с рынка;
2. $p_2 \in [1/5\,;3/7] \;\Rightarrow\; p_1 = p_2$, $q_1 = q_2 = Q/2 = (1 - p_2)/2$ – дележ рынка;
3. $p_2 \in (3/7\,;2/3] \;\Rightarrow\; p_1 = p_2 - \Delta \approx p_2$, $q_1 = Q = 1 - p_2$ – захват рынка;
4. $p_2 > 2/3 \;\Rightarrow\; p_1 = 2/3$, $q_1 = Q = 1/3$ – захват рынка, извлечение монопольной прибыли.

Для второй фирмы ситуация будет абсолютно симметричной. Нарисуем на графике кривые реакции каждой фирмы на действия конкурента.



Сплошной линией изображена кривая реакции первой фирмы на цену второй, а пунктирной – кривая реакции второй фирмы на цену первой.

Жирной линией показана область их пересечения – область равновесия, когда ни одной из фирм не выгодно изменить цену.

Наилучшим из всех равновесий будет равновесие $p_1 = p_2 = 3/7$, $q_1 = q_2 = 2/7$. Прибыль каждой фирмы при этом составит $\pi_1 = \pi_2 = $
$= 3/7 \cdot 2/7 - (2/7)^2/2 = 4/49$.

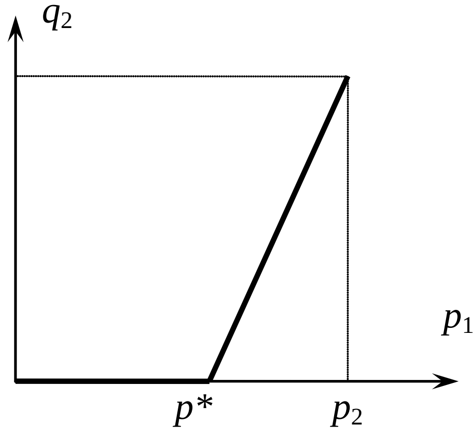
Задача 6.19**

На рынке компакт-дисков, суммарный месячный спрос на которые составляет $Q = 160 - p$ (тыс. шт.), действует 2 независимых конкурента. Если обе фирмы установят одинаковые цены $p_1 = p_2$, рынок разделится пополам. Спрос q_2 на продукцию второй (более дорогой) фирмы линейно убывает с падением цены p_1 первой (более дешевой) и становится нулевым в точке $p_1 = p^*$, в которой суммарный спрос $Q(p_1)$ вдвое больше, чем при цене p_2. Найти точку (цены, объемы продаж и прибыли), равновесную по Нэшу, когда ни одной из фирм не выгодно увеличивать или уменьшать цену продукции, при условии, что каждой из них компакт-диски обходятся в 50 руб.

Решение:

Пусть вторая (дорогая) фирма продает продукцию по цене p_2. Найдем критическую цену первой (дешевой) фирмы p^*, при которой она захватывает весь рынок:

$$160 - p^* = 2(160 - p_2), \quad p^* = 2p_2 - 160.$$



Так как при падении цены первой фирмы с $p_1 = p_2$ до $p_1 = p^* = 2p_2 - 160$ спрос на продукцию второй фирмы линейно уменьшается с $q_2 = 0{,}5(160 - p_2)$ до $q_2 = 0$, то можем найти эту линейную зависимость $q_2 = \alpha + \beta p_1$.

Коэффициент β находим как тангенс угла наклона:

$$\beta = \frac{0{,}5(160 - p_2)}{p_2 - (2p_2 - 160)} = \frac{0{,}5(160 - p_2)}{160 - p_2} = 0{,}5.$$

Свободный член α отыщем, подставив в функцию $q_2 = \alpha + 0{,}5p_1$ значения $p_1 = p_2$ и $q_2 = 0{,}5(160 - p_2)$:

$$0{,}5(160 - p_2) = \alpha + 0{,}5p_2, \quad \alpha = 80 - p_2.$$

Таким образом,

$$q_2(p_1) = \begin{cases} 80 - p_2 + 0{,}5p_1, p^* \le p_1 \le p_2, \\ 0, p_1 < p^*. \end{cases}$$

Поскольку суммарный спрос при цене p_1 составляет $Q = 160 - p_1$, то спрос на продукцию первой фирмы равен

$$q_1(p_1) = 160 - p_1 - q_2(p_1) = \begin{cases} 80 + p_2 - 1{,}5p_1, p^* \le p_1 \le p_2, \\ 160 - p_1, p_1 < p^*. \end{cases}$$

Найдем кривую реакции первой фирмы (ее оптимальную цену в зависимости от цены второй фирмы) при условии, что себестоимость единицы продукции равна 50 руб. Для этого максимизируем прибыль

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - 50)q_1 = (p_1 - 50)(80 + p_2 - 1{,}5p_1) \to \max_{p_1}.$$

Найдем частную производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 155 + p_2 - 3p_1 = 0, \qquad p_1 = \frac{1}{3}(155 + p_2).$$

Аналогично, зафиксировав p_1, вычислим кривую реакции второй фирмы:

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - 50)q_2 = (p_2 - 50)(80 - p_2 + 0{,}5p_1) \to \max_{p_2}.$$

Найдем частную производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial \pi_2(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 260 + p_1 - 4p_2 = 0, \qquad p_2 = \frac{1}{4}(260 + p_1).$$

Решив систему из 2 уравнений, найдем точку пересечения кривых реакции:

$$\overline{p}_1 = 80,\ \overline{p}_2 = 85.$$

Данная точка является равновесной по Нэшу – ни одной из фирм не выгодно увеличивать или уменьшать цену продукции. Найдем объемы продаж и прибыли каждой фирмы:

$$\overline{q}_1 = 80 + 85 - 1{,}5 \cdot 80 = 45, \qquad \overline{q}_2 = 80 - 85 + 0{,}5 \cdot 80 = 35,$$

$$\overline{\pi}_1 = (80 - 50) \cdot 45 = 1350, \qquad \overline{\pi}_2 = (85 - 50) \cdot 35 = 1225.$$

Задача 5.20**

На рынке компакт-дисков действуют n независимых конкурентов. Спрос на продукцию каждого из них (тыс. шт.) в зависимости от цен вычисляется по формуле

$$q_i = \frac{160 - p_1}{n} - p_i + \frac{1}{n-1} \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} p_j.$$

Здесь p_1 – цена в самой дешевой фирме, p_i, $i = 2, ..., n$ – в остальных фирмах. Найти точку Нэша, в которой ни одной из фирм невыгодно менять цены, для двух, трех и произвольного числа фирм, если каждой из них диски обходятся в $c = 50$ руб.

Решение:

Видим, что функция спроса отличается только для самого дешевого олигополиста: если снижается цена в самой дешевой фирме, то помимо перераспределения покупателей между конкурентами происходит расширение рынка. Выпишем и максимизируем его функцию прибыли. Учтем при этом, что в точке оптимума $p_2 = ... = p_n = p^*$:

$$\pi_1 = (p_1 - 50)\left(\frac{160 - p_1}{n} - p_1 + \frac{1}{n-1}(p_2 + ... + p_n)\right) =$$

$$= \frac{160p_1}{n} - \frac{(n+1)p_1^2}{n} + \frac{p_1}{n-1}(p_2 + ... + p_n) -$$

$$- \frac{160 \cdot 50}{n} + \frac{50(n+1)p_1}{n} - \frac{50}{n-1}(p_2 + ... + p_n) \to \max_{p_1},$$

Приравняв частную производную к нулю, получим:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \frac{160}{n} - \frac{2(n+1)}{n} p_1 + \frac{1}{n-1}(n-1)p^* + \frac{50(n+1)}{n} = 0,$$

$$p_1 = \frac{160 + 50(n+1) + np^*}{2(n+1)}.$$

Для остальных фирм функции прибыли будут иметь следующий вид:

$$\pi_i = (p_i - 50)\left(\frac{160 - p_1}{n} - p_i + \frac{1}{n-1}(p_1 + \ldots + p_{i-1} + p_{i+1} + \ldots + p_n)\right) =$$

$$= \frac{(160 - p_1)\, p_i}{n} - p_i^2 + \frac{p_i}{n-1}(p_1 + \ldots + p_{i-1} + p_{i+1} + \ldots + p_n) -$$

$$- \frac{(160 - p_1)\,50}{n} + 50 p_i - \frac{50}{n-1}(p_1 + \ldots + p_{i-1} + p_{i+1} + \ldots + p_n) \to \max_{p_i}, \ i = 2, \ldots, n.$$

Также приравняем частные производные к нулю:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{160 - p_1}{n} - 2p^* + \frac{1}{n-1}(p_1 + (n-2)p^*) + 50 = 0,$$

$$\frac{160}{n} + 50 + \frac{n - (n-1)}{n(n-1)} p_1 - \frac{2n - 2 - (n-2)}{n-1} p^* = 0,$$

$$p_1 = n^2 p^* - 160(n-1) - 50n(n-1).$$

Приравниваем полученные выше выражения для p_1 и находим из них p^*:

$$\frac{160 + 50(n+1) + np^*}{2(n+1)} = n^2 p^* - 160(n-1) - 50n(n-1),$$

$$2n^2(n+1)p^* - 320(n^2 - 1) - 100n(n^2 - 1) - 160 - 50(n+1) - np^* = 0,$$

$$p^* = \frac{320(n^2 - 1) + 100n(n^2 - 1) + 50(n+1) + 160}{2n^3 + 2n^2 - n} = 50 + \frac{220n^2 - 110}{2n^3 + 2n^2 - n}.$$

Выразим p_1:

$$p_1 = \frac{220n^3 - 110n}{2n^2 + 2n - 1} - 110n + 160 = \frac{100n^2 + 320n - 160}{2n^2 + 2n - 1} = 160 - \frac{220n^2}{2n^2 + 2n - 1}.$$

Подставив в полученные формулы значения $n = 2$ и $n = 3$, получим искомые равновесные значения:

$n = 2$: $p_1 = 80$, $p^* = 85$, $q_1 = 45$, $q^* = 35$, $\pi_1 = 1350$, $\pi^* = 1225$.

$n = 3$: $p_1 = 73{,}9$, $p^* = 77{,}1$, $q_1 = 31{,}9$, $q^* = 27{,}1$, $\pi_1 = 762$, $\pi^* = 734$.

6. МАКРОЭКОНОМИКА

Задача 6.1

Указать, что из перечисленного войдет в состав ВВП России текущего года:

1. На 1 млн руб. произведен материал для пошива костюмов.
2. Перед новым годом фирма сшила 100 костюмов, которые собирается продать в следующем году.
3. Фирма купила на 2000 руб. российских конфет для подарков своим сотрудникам.
4. Российские специалисты строят атомную электростанцию в Индии.
5. «Альфа-банк» приобрел контрольный пакет акций «Бета-банка».

Решение:

1. **Не войдет**, так как материал не является конечной продукцией.
2. **Войдет**, так как продукция входит в ВВП по году производства.
3. **Войдет**, так как продана конечная продукция, произведенная на территории России.
4. **Не войдет**, так как работы проводятся за пределами России.
5. **Не войдет**, так как любые финансовые сделки не входят в состав ВВП.

Задача 6.2

Указать, что из перечисленного должно войти в состав ВВП, а что – в состав ВНП России текущего года.

1. Оптовая торговая компания увеличила стоимость продаваемой продукции на 50 млн руб.
2. Российская компания купила отель в Таиланде за 25 млн долл.
3. За год российский отель в Таиланде обслужил 20 тыс. туристов на общую сумму 8 млн долл.
4. За год баба Люся связала 5 свитеров для себя и своей семьи.
5. За год баба Люся продала на перроне 5 тыс. пирожков с картошкой.

Решение:

1. Добавленная стоимость, привнесенная торговлей, **включается в ВВП и в ВНП**.
2. Финансовые сделки **не включаются ни в ВВП, ни в ВНП**.
3. Сумма **включается в ВНП** России, поскольку отель принадлежит Российской компании, но **не включается в ВВП**, так как отель не находится на Российской территории.
4. Товары, произведенные не на продажу, а для личного потребления, **не включаются ни в ВВП, ни в ВНП**.
5. Товары, произведенные на продажу, должны **включаться в ВВП и в ВНП**.

Задача 6.3.

Рассчитать ВВП любым способом, если имеются следующие данные, трлн руб.:

Амортизация	2,7	Потребительские расходы	16,9
Государственные расходы	3,3	Прибыль некорпоратив.сектора	3,4
Дивиденды	2,5	Прямые налоги	4,2
Заработная плата	10,5	Трансферты	4,6
Импорт	3,9	Чистые инвестиции	1,6
Косвенные налоги	2,8	Экспорт	7,1

Решение:

ВВП по расходам вычисляется как сумма потребительских, инвестиционных, государственных расходов и чистого экспорта ($Y = C + I + G + NX$). В свою очередь, инвестиционные расходы – это сумма чистых инвестиций и амортизации, а чистый экспорт равен разности экспорта и импорта.

Таким образом, ВВП = 16,9+(1,6+2,7)+3,3+(7,1–3,9) = **27,7 трлн руб.**

Задача 6.4

В стране Съютландии вся легкая промышленность занимается производством шерстяных костюмов. В год таких костюмов изготавливается 5 млн. При этом производственный процесс состоит из 5 стадий: овцеводческие фермы поставляют предприятиям по шерстепереработке шерсть на сумму 40 тугриков из расчета на 1 костюм, шерстеперерабатывающие предприятия продают материал швейным фабрикам по 60 тугриков из расчета на 1 костюм, швейные фабрики поставляют готовые костюмы крупным оптовикам по 100 тугриков, а те, в свою очередь, – розничным продавцам по 120 тугриков. Последние, наконец, продают костюмы жителям Съютландии по 180 тугриков. Определите долю легкой промышленности в ВНП, если ВНП Съютландии составляет 10 млрд тугриков.

Решение:

В ВНП включается только конечная продукция, т.е. костюмы, продающиеся розничными продавцами конечному потребителю по 180 тугриков. Поскольку таких костюмов в год продается 5 млн, то их общая стоимость составит 5 млн·180 = 900 млн тугриков. Это валовая продукция легкой промышленности. Ее доля в ВНП Съютландии равна 900 млн / 10 млрд = **0,09 = 9 %.**

Задача 6.5

Фирма за 100 тыс. руб. приобрела ризограф, нормативный износ которого достигается при печати 5 млн копий. Ликвидационная стоимость ризографа равна 20 тыс. руб. Сколько копий сделано на текущий момент, если остаточная стоимость ризографа составляет 40 тыс. руб.?

Решение:
При печати 5 млн копий стоимость ризографа уменьшится на $100-20=80$ тыс. руб. Сейчас стоимость ризографа уменьшилась только на $100-40=60$ тыс. руб. Значит, износ ризографа составляет $5\,\text{млн}\cdot 60/80=$ **3,75 млн копий**.

Задача 6.6

Нормативный износ станка достигается при производстве 500 тыс. деталей. Ликвидационная стоимость равна 30 тыс. руб. Остаточная стоимость станка после изготовления 200 тыс. деталей составляет 240 тыс. руб. Найти первоначальную стоимость станка, предполагая линейное начисление амортизации.
Решение:
Обозначим первоначальную стоимость за x. Получим соотношение:

$$x-\frac{x-30}{500}\cdot 200=240,\quad x-0{,}4(x-30)=240,\quad 0{,}6x=228,\quad x=228/0{,}6=380.$$

Ответ. Первоначальная стоимость станка составляет **380 тыс. руб.**

Задача 6.7

Номинальный ВВП России вырос с 2000 по 2008 г. с 5,2 до 33,54 трлн руб. При этом цены выросли на 275 %. Удалось ли решить задачу удвоения ВВП? На сколько процентов вырос за эти годы объем производства?
Решение:
Рост номинального ВВП складывается из двух составляющих: роста физического объема производства и роста цен: $I_Y=I_pI_q$. Номинальный ВВП за 8 лет вырос в 33,54/5,2 = 6,45 раза. При этом цены выросли в 3,75 раза. Следовательно, рост физического объема производства в России составил 6,45/3,75 = 1,72 раза или **72 %**. Задача удвоения ВВП решена **не была**.

Задача 6.8

В стране Инфляндии денежная масса за год выросла на 100%. Могли ли за тот же период цены вырасти втрое при неизменном физическом объеме производства? Если нет, то почему? Если да, то в какой ситуации?
Решение:
Цены могут вырасти втрое при неизменном физическом объеме производства и росте денежной массы вдвое, если **в 3/2 = 1,5 раза вырастет скорость обращения денег**.

Задача 6.9

Валовый внутренний продукт в стране Инфляндии за год вырос с 4 до 9 трлн талеров. Как и насколько изменился физический объем производства, если цены за этот же период выросли на 150%.

Решение:
Индекс ВВП, показывающий во сколько раз вырос номинальный ВВП (в задаче он составляет 9/4=2,25), равен произведению индекса цен (2,5) и индекса объемов производства. $I_q = 2{,}25/2{,}5 = 0{,}9$. Таким образом, объем производства **сократился на 10 %**.

Задача 6.10

На начало года денежная масса в Ачхурабии была равна 50 млрд бакшишей. Рост производства за год составил 8 %. Может ли Центральный Банк безынфляционно провести денежную эмиссию, при условии, что скорость обращения денег упала на 10 %. Если нет, то почему? Если да, в каком объеме?

Решение:
По уравнению денежного обмена, $I_p I_q = I_M I_v$, где I_p – индекс цен, I_q – индекс объема производства, I_M – индекс денежной массы и I_v – индекс скорости обращения.
В нашем случае $I_p = 1$ (цены не должны вырасти), $I_q = 1{,}08$ (рост производства 8 %), $I_v = 0{,}9$ (скорость обращения упала на 10 %). Найдем индекс денежной массы:

$$I_M = I_p I_q / I_v = 1 \cdot 1{,}08/0{,}9 = 1{,}2.$$

Денежная масса может, не вызывая инфляции, вырасти в 1,2 раза или на 20 %. Следовательно, можно напечатать 50·20 % = **10 млрд бакшишей**.

Задача 6.11

Денежная масса в России за год выросла с 4 до 6 трлн руб. Какую следует ожидать инфляцию, если объем производства при этом вырос на 8 %, а скорость обращения сократилась на 19 %?

Решение:
По уравнению денежного обмена Фишера $I_p I_q = I_M I_v$. Здесь I_p – индекс цен, I_q – индекс объемов производства, I_M – индекс денежной массы, I_v – индекс скорости обращения. В нашем случае $I_M = 6/4 = 1{,}5$, $I_q = 1{,}08$, $I_v = 0{,}81$. Отсюда $I_p = I_M I_v / I_q = 1{,}5 \cdot 0{,}81/1{,}08 = 1{,}125 = 112{,}5\%$. Таким образом, инфляция составит **12,5 %**.

Задача 6.12

В стране Ляминорике, переживающей бурный экономический рост в 12 % годовых, для его поддержания провели денежную эмиссию в размере 3 трлн лямов (местных денежных единиц). При этом скорость обращения за год сократилась на 2 %, а инфляция составила 5 %. Оценить размер денежной массы в Ляминорике на конец года.

Решение:
В соответствии с уравнением денежного обмена Фишера $I_p I_q = I_M I_v$. Подставим в него все известные данные $I_p = 1{,}05$, $I_q = 1{,}12$, $I_v = 0{,}98$, получим $I_M = 1{,}05 \cdot 1{,}12 / 0{,}98 = 1{,}2$. Следовательно, денежная масса выросла на 20%. Пусть на начало года денежная масса была равна *x*, тогда $0{,}2x = 3$, $x = 15$ трлн лямов. В конце года, увеличившись на 3 трлн, она стала равна **18 трлн лямов**.

Задача 6.13

Некто произвел оплату за телефонные разговоры на сумму 500 руб. Рассчитать величину НДС (НДС = 18%).

Решение:
Если цена до взятия НДС равна 100 %, то цена вместе с НДС (в данном случае 500 руб.) составит 100% + 18% = 118%. Решим пропорцию:

118% = 500 руб., 18% = *x* руб.,

$x = 500 \cdot 0{,}18/1{,}18 =$ **76,27 руб**.

Задача 6.14

Номинальная зарплата рабочего составляет 40 тыс. руб./мес. Сколько он получит на руки? Сколько должен заплатить работодатель? Подоходный налог 13%, единый социальный налог 30%.

Решение:
На руки рабочий получает номинально указанную сумму за вычетом 13 % подоходного налога, т.е. 40 тыс. – 0,13·40 тыс. = **34 800 руб.** Работодатель помимо 40 тыс. руб. заработной платы платит 30 % единого социального налога: 40 тыс. + 0,3·40 тыс. = **52 000 руб.**

Задача 6.15

Ставка единого социального налога в России до 2010 г. составляла 26 % при годовом доходе до 280 тыс. руб., 10% при доходе от 280 до 600 тыс. руб. и 2 % при доходе свыше 600 тыс. руб. Какова сумма налога, которую необходимо было уплатить работнику со среднемесячным доходом 60 тыс. руб.?

Решение:
Годовой доход работника составляет 60·12=720 тыс. руб. С первых 280 тыс. руб. он должен заплатить 26%, со следующих 320 тыс. руб. (от 280 до 600) – 10%. Наконец, с последних 120 тыс. руб. (свыше 600) – 2%. Рассчитаем итоговую сумму:

$$280 \cdot 0{,}26 + 320 \cdot 0{,}1 + 120 \cdot 0{,}02 = 72{,}8 + 32 + 2{,}4 = 107{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Работник должен уплатить налог в размере **107,2 тыс. руб.**

Задача 6.16

В стране Прогрессивии действует следующая система налогообложения:

совокупный доход, талеров / г.	до 10000	10001–100000	>100000
ставка подоходного налога, %	10%	20%	30%

В налоговой инспекции обнаружили, что мистер Смит, заработавший за год 500 тыс. талеров, заплатил 139 тыс. талеров подоходного налога. Укрывает ли мистер Смит свои доходы от уплаты налогов? Если да, какую сумму ему необходимо доплатить?

Решение:

Мистер Смит должен заплатить 10 % с первых 10 000 талеров + 20 % с последующих 90 000 талеров + 30 % с суммы заработка, превышающей 100 000 талеров (что составит 400 000 талеров). Подсчитываем сумму подоходного налога:

$0{,}1 \cdot 10\,000 + 0{,}2 \cdot 90\,000 + 0{,}3 \cdot 400\,000 = 1000 + 18\,000 + 120\,000 = 139\,000$ талеров. Таким образом, мистер Смит **честно заплатил подоходный налог в полном объеме.**

Задача 6.17

Налоговый инспектор обнаружил, что фактический доход за прошлый год гражданина Иванова составил 500 тыс. руб., в то время как уплаченный подоходный налог составил 62 тыс. руб. Какую сумму дохода скрыл Иванов, если в стране действует прогрессивная система налогообложения, представленная в таблице?

доход (руб.)	до 100 тыс.	от 100 до 200 тыс.	свыше 200 тыс.
ставка налога, %	12%	20%	30%

Решение:

С первых 100 тыс. руб. дохода гражданин Иванов должен заплатить по ставке 12 % сумму $100 \cdot 0{,}12 = 12$ тыс. руб. Со вторых 100 тыс. руб. – по ставке 20 % сумму $100 \cdot 0{,}2 = 20$ тыс. руб. По максимальной ставке 30 % Иванов заплатил $62 - 12 - 20 = 30$ тыс. руб. Соответственно, была указана сумма $30 / 0{,}3 = 100$ тыс. руб. Таким образом, Иванов задекларировал $100 + 100 + 100 = 300$ тыс. руб., а сокрыл оставшиеся $500 - 300 =$ **200 тыс. руб.**

Задача 6.18*

Налоговые сборы с добычи анобтаниума в зависимости от ставки t оцениваются формулой $T = 0{,}8t - t^2$ (трлн \$). При какой ставке налоговые сборы будут максимальны? Если цель государства собрать не менее 120 млрд \$ налогов и при этом в минимальной степени ограничить добычу, какова должна быть ставка налога? Если экологи убедили правительство, что добыча должна быть максимально ограничена, однако нужно собрать в бюджет не менее 70 млрд \$, какова должна быть ставка?

Решение:
Решив задачу максимизации налоговых сборов, получим

$T = 0{,}8t - t^2 \to \max, \quad 0{,}8 - 2t = 0, \quad t$ **= 0,4 = 40 %**,

$T = 0{,}8 \cdot 0{,}4 – 0{,}4^2 =$ **0,16 трлн $**.

Найдем, при каких ставках налоговые сборы будут не меньше 120 млрд $.

$T = 0{,}8t - t^2 \geq 0{,}12, \quad t \in [0{,}2;\ 0{,}6]$.

Поскольку необходимо в минимальной степени ограничить добычу, нужно установить минимальную налоговую ставку **20 %**.
Таким же образом найдем, при каких ставках в бюджет будет собрано не менее 70 млрд $:

$T = 0{,}8t - t^2 \geq 0{,}07, \quad t \in [0{,}1;\ 0{,}7]$.

Для наибольшего сокращения добычи нужно установить максимальную ставку **70 %**.

Задача 6.19

Естественный уровень безработицы составляет 4 %. При фактическом уровне безработицы 10 % ВВП равен 15,3 трлн руб. Найти потенциальный ВВП. Предположить, что коэффициент Оукена равен 2,5.

Решение:
Уровень безработицы превышает естественный на (10 – 4) % = 6 %. По закону Оукена каждый лишний процент безработицы сокращает ВВП на 2,5 %. Таким образом, итоговые потери ВВП составят 6·2,5 = 15 %, т.е. фактический ВВП составляет 85 % от потенциального.

$ВВП_{факт} = 0{,}85 \cdot ВВП_{пот}, \quad 15{,}3 = 0{,}85 \cdot ВВП_{пот}$,

$ВВП_{пот} = 15{,}3/0{,}85 =$ **18 трлн руб**.

Задача 6.20*

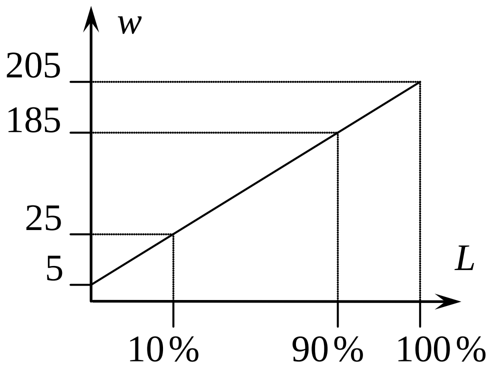
Безработица в некотором регионе составила в 2012 г. 10 %. В 2013 г. 26,5 % безработных нашли работу, 7 % работавших в 2012 г. – потеряли, а 10 % – переехали в поисках лучшей жизни в соседний регион. Каков стал уровень безработицы в 2013 г.?

Решение:
Безработица вычисляется как отношение числа безработных к рабочей силе. Пусть в 2012 г. рабочая сила составляла x чел., тогда $0{,}9x$ составляли работающие, а $0{,}1x$ – безработные. В 2013 г. 10 % работающих (т.е. $0{,}09x$) переехали в другой регион, соответственно рабочая сила оказалась равной $0{,}91x$.
Число безработных уменьшилось за счет того, что 26,5 % из них ($0{,}0265x$) нашли работу. Однако при этом 7 % работающих ($0{,}063x$) работу потеряли. Таким образом, безработица в 2013 г. составила $(0{,}1x - 0{,}0265x + 0{,}063x)/0{,}91x = 0{,}15 =$ **15 %**.

Задача 6.21*

Ежемесячные доходы жителей некоторой страны равномерно распределены в диапазоне от 5 до 205 тыс. руб./мес. Найти коэффициент фондов – отношение доходов 10 % наиболее богатых граждан к доходам 10% наиболее бедных. На какую единую для всех сумму должны вырасти доходы жителей, чтобы удалось снизить значение коэффициента фондов до уровня 11?

Решение:



Поскольку распределение доходов равномерное, 10 % наиболее бедных граждан получают доходы от 5 до 25 тыс. руб. (каждый следующий процент населения богаче предыдущего на 2 тыс. руб.), что в среднем составляет 15 тыс. руб. Напротив, самые богатые получают от 185 до 205, т.е. в среднем 195 тыс. руб./мес. Коэффициент фондов равен $K_f = 195/15 = 13$.

Пусть доходы всех жителей выросли на величину *x*, тогда ровно настолько же возросли и средние доходы богатых и бедных. Коэффициент фондов станет равным $K_f = (195 + x)/(15 + x) = 11$, $195 + x = 165 + 11x$, $x = 3$.

Значит, **доходы всех жителей должны вырасти на 3 тыс. руб./мес.**

Задача 6.22

Население страны сберегает 40 % от каждой дополнительной единицы располагаемого дохода при автономном потреблении, равном 100 млрд руб. Инвестиционные расходы составляют $I = 300$ млрд руб. Государственные закупки товаров и услуг – $G = 900$ млрд руб. Экспорт на 200 млрд руб. превышает импорт. Определите при сбалансированном государственном бюджете равновесный объем производства и значение мультипликатора Кейнса.

Решение:

Располагаемый доход равен величине ВВП за вычетом налогов: $Y_D = Y - T$. Налоги при сбалансированном бюджете равны государственным расходам: $T = G = 900$. Поскольку население сберегает 40 % от каждой дополнительной единицы располагаемого дохода, то тратит на потребление оставшиеся 60 %. Тогда функция потребления будет иметь вид $C = 100 + 0{,}6(Y - 900)$. Совокупный спрос складывается из потребления *C*, инвестиций *I*, государственных расходов *G* и чистого экспорта *NX* (разницы между экспортом и импортом). В равновесии совокупный спрос равен совокупному предложению *Y*.

$Y = 100 + 0{,}6(Y - 900) + 300 + 900 + 200$, $0{,}4Y = 960$, $\mathbf{Y = 2400}$ **(млрд руб.)**

Мультипликатор Кейнса показывает, во сколько раз сильнее, чем инвестиции, увеличивается равновесный ВВП. Он равен величине, обратной к предельной норме сбережения:

$M_K = 1/MP_S = 1/0{,}4$, $\mathbf{M_K = 2{,}5}$.

Задача 6.23

Планируемые потребительские расходы заданы функцией $C = 0{,}5 + 0{,}8(Y - T)$ (трлн руб.), где Y – номинальный ВВП, T – налоги. Инвестиционные расходы составляют 2 трлн руб., государственные расходы – 2,5 трлн руб., экспорт – 2,8 трлн руб., импорт 2 трлн руб. Найти равновесный объем ВВП при условии сбалансированного бюджета. Как должны измениться инвестиционные расходы, чтобы экономика достигла уровня полной занятости, если известно, что потенциальный ВВП составляет 20 трлн руб.

Решение:

Условие макроэкономического равновесия: $Y = C + I + G + Ex - Im$. Подставим имеющиеся данные, учитывая, что при сбалансированном бюджете налоги равны государственным расходам:

$$Y = 0{,}5 + 0{,}8(Y - 2{,}5) + 2 + 2{,}5 + 2{,}8 - 2, \quad 0{,}2Y = 3{,}8, \quad Y = 19.$$

При изменении инвестиционных расходов на ΔI, равновесие изменится:

$$Y = 0{,}5 + 0{,}8(Y - 2{,}5) + (2 + \Delta I) + 2{,}5 + 2{,}8 - 2, \quad 0{,}2Y = 3{,}8 + \Delta I,$$

$$Y = 19 + 5\Delta I = 20, \quad \Delta I = 0{,}2.$$

Ответ. Равновесный ВВП составляет **19 трлн руб.** Инвестиционные расходы должны увеличиться на **200 млрд руб.**

Задача 6.24*

В закрытой экономике потребление задано функцией $C = 2 + 0{,}8(Y - T)$, а инвестиционные расходы $I = 10 - 10r$, налоговое сборы составляют T = 10 трлн руб., а государственные расходы – G = 8 трлн руб. Денежная масса равна M = 9 трлн руб., а скорость обращения равна v = 5. Спрос на деньги задан функцией $M_D = Y - 100r$. Найти равновесный уровень ВВП Y и процентной ставки r. Что произойдет с ними, если государственные расходы вырастут до 9,5 трлн руб. при неизменных налогах. Рассмотреть Кейнсианский и классический участок. Для классического участка указать, как изменится общий уровень цен в стране.

Решение:

Равновесие на товарном рынке (кривая *IS*) означает, что совокупное предложение Y совпадает с совокупным спросом, складывающимся из потребительского, инвестиционного и государственного:

$$Y = C + I + G = 2 + 0{,}8(Y - 10) + 10 - 10r + 8 = 0{,}8Y + 12 - 10r, \quad Y = 60 - 50r.$$

Равновесие на денежном рынке (кривая *LM*) означает, равенство спроса на деньги M_D и предложения денег $M_S = Mv = 9 \cdot 5 = 45$.

$$Y - 100r = 45, \quad Y = 45 + 100r.$$

Решив систему из двух уравнений, найдем равновесие на двух рынках:

$Y = 60 - 50r = 45 + 100r, \quad 150r = 15, \quad r = 0{,}1$ **=10 %.**, ***Y*=55 трлн руб.**

При росте государственные расходы до 9,5 трлн руб., *IS* принимает вид

$$Y = C + I + G = 2 + 0{,}8(Y - 10) + 10 - 10r + 9{,}5 = 0{,}8Y + 13{,}5 - 10r, \quad Y = 67{,}5 - 50r.$$

На Кейнсианском участке цены неизменны. Решим похожую систему

$Y = 67{,}5 - 50r = 45 + 100r$, $150r = 22{,}5$, $r = 0{,}15$**=15 %**., ***Y*=60 трлн руб.**

На классическом участке в условиях полной занятости невозможно увеличение ВВП свыше изначального значения 55 трлн руб. Следовательно, произойдет рост процентных ставок, величину которого найдем из равновесия на товарном рынке:

$55 = 67{,}5 - 50r$, $50r = 12{,}5$, $r = 0{,}25$=**25 %**.

Далее из равновесия на денежном рынке найдем рост цен:

$M_D = (Y - 100r)P = 45$, $(55 - 100 \cdot 0{,}25)P = 45$, $P = 1{,}5$.

Таким образом, цены вырастут в 1,5 раза, т.е. будет наблюдаться **инфляция 50 %**.

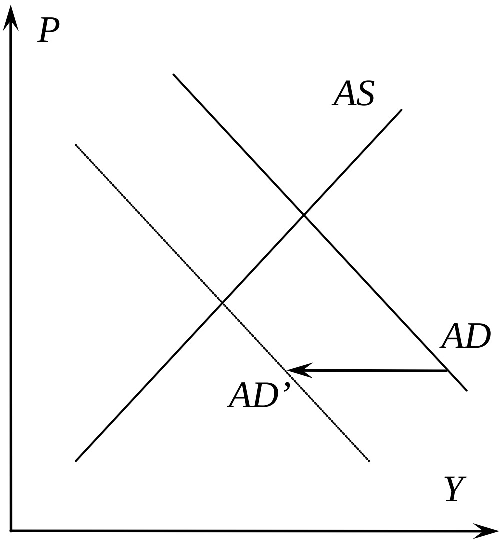
Задача 6.25*

Каких изменений совокупного спроса и совокупного предложения следует ожидать в связи с укреплением рубля относительно мировых валют? Что произойдет с равновесным уровнем цен и объемом производства? Предположить нахождение на промежуточном участке.

Оценить, правильно ли действует государство, ведущее с целью закрепить успех «политику дорогих денег», в частности, повышая ставку рефинансирования.

Решение:

Совокупный спрос складывается из потребительского, инвестиционного, государственного спроса и чистого экспорта. В результате укрепления рубля увеличится ставший более выгодным импорт и сократится экспорт. Таким образом, за счет сокращения чистого экспорта **уменьшится (сдвинется влево) совокупный спрос**. В точке равновесия уменьшатся цены и физический объем производства. Причем, если вспомнить, что цены жесткие в сторону понижения, сокращение коснется в первую очередь производства.



Если Центральный банк повысит ставку рефинансирования, поползут вверх банковские ставки по кредитам и депозитам, станет менее выгодно приобретать товары и услуги (особенно за счет заемных средств), а более выгодно держать деньги в банке. Потребительский и инвестиционный спрос сократится, кривая AD продолжит смещение влево, что чревато еще большим сокращением производства. В данной ситуации можно посоветовать Центральному банку **снизить ставку рефинансирования** с целью увеличения совокупного спроса.

7. ФИНАНСЫ

Задача 7.1

В первом полугодии цены выросли на 20 %, а во втором – на 30 %. Каков годовой уровень инфляции?

Решение:

Цены за год выросли в 1,2·1,3 = 1,56 раза, т.е. **на 56 %.**

Задача 7.2

Рост тарифа на электроэнергию в 2011 г. составил 15 %, в 2012 г. – 12,5 %, а в 2013 г. – 12 %. На сколько процентов вырос тариф за 3 года?

Решение:

Тариф за 3 года вырос в 1,15·1,125·1,12 = 1,449 раза, т.е. **на 44,9 %**.

Задача 7.3

Месячная инфляция не изменялась в течение года и составляла 10 %. На сколько процентов выросли цены за год?

Решение:

Поскольку проценты насчитываются на проценты, а ежемесячно цены растут в 1,1 раза, то за 12 месяцев будет наблюдаться рост в $1{,}1^{12} = 3{,}14$ раза, или **на 214 %**.

Задача 7.4

Верховный шейх Ачхурабии поставил задачу увеличить валовый внутренний продукт государства вдвое за предстоящие 8 лет. На сколько процентов ВВП должен возрастать ежегодно, если считать, что темпы роста постоянны?

Решение:

Важно заметить, что проценты насчитываются на проценты. Таким образом, ежегодный темп роста должен составлять $\sqrt[8]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \approx 1{,}0905$, т.е. ВВП должен **ежегодно возрастать на 9,05 %**.

Задача 7.5

Акции ОАО «БобруйскПромСтройЛомай» в 2007 г. выросли в цене на 60 %, в 2008 г. упали на 60 %, а в 2009 г. снова выросли на 50 %. Приумножил ли за 3 года свои капиталы инвестор, вложившийся в эти акции? Ответ обосновать.

Решение:

Пусть инвестор вложил в акции сумму x. По итогам 2007 г. эта сумма увеличилась в 1,6 раза, в 2008 г. от нее осталось x·1,6·0,4=0,64x, а к концу 2009 г. капитал инвестора составил x·1,6·0,4·1,5=0,96x, что **на 4 % меньше вложенной суммы**. Инвестору приумножить свои капиталы **не удалось**.

Задача 7.6

Миша Шумахер планирует через 5 лет купить машину стоимостью 320 тыс. руб., вложив для этого 200 тыс. руб. под 10 % годовых. Хватит ли ему средств?

Решение:

За 5 лет сумма на счете составит $200 \cdot 1{,}1^5 = 322{,}102$ тыс. руб. Видим, что она превышает необходимые для покупки автомобиля 320 тыс. руб. **Средств окажется достаточно.**

Задача 7.7

Банк «ВКПБ-24» выдает кредиты под 15 % годовых, взимая дополнительную комиссию в размере 2 тыс. руб. Кредиты какого размера будут интересны для клиента, не готового занимать деньги более чем под 20 % годовых.

Решение:

При взятии кредита в размере x клиент должен будет выплатить банку сверх тела кредита сумму $2000 + 0{,}15x$. По условию она не должна превышать 20 %, т.е. $0{,}2x$.

$$2000 + 0{,}15x \le 0{,}2x, \quad 0{,}05x \ge 2000, \quad \mathbf{x \ge 40\ \text{тыс. руб.}}$$

Задача 7.8

В связи с выросшей инфляцией Сбербанк Белогории поднял процентные ставки по депозиту до 50 % годовых при вкладе на 3 года. Смогут ли вкладчики сберечь свои деньги от инфляции, если по прогнозам в текущем году инфляция в Белогории составит 80 %, в следующем – 50 %, а через 2 года – 25 %. Будут ли у вкладчиков потери? Если да, то какие?

Решение:

При процентной ставке в 50 % годовых, вкладчики за 3 года увеличат сумму депозита в $1{,}5^3 = 3{,}375$ раза. Цены за тот же период вырастут в $1{,}8 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}25 = 3{,}375$ раза. Таким образом, депозит **в точности сберегает деньги от инфляции** (потерь не будет), но **не позволяет увеличить богатство**.

Задача 7.9

Банк предлагает 2 вида вклада, со ставкой 10 % годовых с начислением по формуле сложных процентов и со ставкой 11 % годовых с начислением по формуле простых процентов. Клиент банка планирует положить деньги на 3 года. Какой вклад он выберет? Изменится ли что-то, если срок вклада увеличится до 5 лет. Каково будет поведение клиента в обеих ситуациях, если ставка по второму виду вклада увеличится с 11 до 12 процентов годовых?

Решение:
При ставке 10 % клиент за 3 года увеличит свой вклад в $1{,}1^3=1{,}331$ раза (т.е. на 33,1 %), а за 5 лет в $1{,}1^5=1{,}61051$ (на 61,051 %). При ставке 11 % с простыми процентами за 3 года набегает 33 %, а за 5 лет – 55 %. Таким образом, **вклад со сложными процентами оказывается выгоднее в обоих случаях.**
При повышении ставки до 12 % процент составит 36 % за 3 года (**что делает этот вклад более выгодным**) и 60 % за 5 лет (**что не позволяет привлечь клиента**).

Задача 7.10*

Банк выдал клиенту кредит на покупку квартиры в размере 2 млн руб. на 5 лет под 10 % годовых. Выплаты по нему осуществляются равными долями ежегодно. Каков будет размер ежегодных выплат?
Решение:
Если клиент взял кредит на сумму a, то через год она с процентами составит $aR = a(1+r)$, где r – процентная ставка. После этого будет осуществлена первая выплата в размере b. Таким образом, во второй год процент будет начисляться на сумму $aR-b$. Аналогичные рассуждения верны для последующих лет. После 5 лет клиент должен полностью расплатиться с кредитом.

$$R\big(R\big(R\big(R(aR-b)-b\big)-b\big)-b\big)-b=0,\quad aR^5-bR^4-bR^3-bR^2-bR-b=0,$$

$$b=\frac{aR^5}{R^4+R^3+R^2+R+1}.$$

При a = 2000 тыс. руб., r = 0,1, R = 1,1, размер ежегодных выплат составит

$$b=\frac{2000\cdot 1{,}1^5}{1{,}1^4+1{,}1^3+1{,}1^2+1{,}1+1}=\textbf{527,6 тыс. руб.}$$

Задача 7.11*

Клиент рассматривает различные сроки кредита на покупку автомобиля ценой 500 тыс. руб. Банк выдает кредит, выплаты по которому осуществляются равными долями ежегодно, под 10 % годовых. На сколько лет будет взят кредит, если ежегодно клиент готов платить не более 100 тыс. руб.?
Решение:
Взяв кредит на 500 тыс. руб., клиент будет через год должен 500·1,1. Выплатив сумму ежегодных платежей x, клиент останется должен сумму (500·1,1 – x), на которую снова накручиваются проценты и т.д. Через n лет, выплатив в n-й раз сумму x, долг оказался равным нулю. Из данного соотношения найдем сумму x:

$$\big((500\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x\big)\ldots\cdot 1{,}1-x=0,\quad 500\cdot 1{,}1^n-1{,}1^{n-1}x-1{,}1^{n-2}x-1{,}1-1=0,$$

$$x(n)=500\cdot 1{,}1^n\ /\big(1{,}1^{n-1}+1{,}1^{n-2}+\ldots 1{,}1+1\big).$$

Подставляя разные n, найдем: $x(7)\approx 102{,}7$, $x(8)\approx 93{,}7$. **Кредит берется на 8 лет**.

Задача 7.12

Некто положил в банк на валютный счет 1000 евро под 6 % годовых. За год курс евро относительно рубля упал на 10 %. Какой процент прибыли был получен в пересчете на рубли?

Решение:

По итогам года вкладчик получил валюты на 6 % (т.е. в 1,06 раза) больше, но каждое евро стало стоить на 10 % меньше. Таким образом, в пересчете на рубли было получено 1,06·0,9 = 0,954 от начальной суммы. То есть **убытки вкладчика составили 4,6 %.**

Задача 7.13

Процентная ставка на рублевом счете 8 % годовых, а на долларовом счете 6 % годовых. Вкладчик имел на некоторую дату 50 тыс. руб. На какой счет ему было выгоднее положить деньги, если курсы покупки и продажи долларов в этот день составляли 27,30 и 27,60 соответственно, а ровно через год – 27,90 и 28,20 соответственно. Какую сумму (в рублях) он выиграл/проиграл, держа деньги на валютном счете?

Решение:

В случае рублевого вклада вкладчик мог получить 50·1,08 = **54 тыс. руб.**

В случае валютного вклада, ему было необходимо обменять рубли на доллары по курсу 27,60, полученную сумму положить на счет, и, спустя год, обменять доллары на рубли по курсу 27,90. Получим: 50/27,60·1,06·27,90 = = **53,576 тыс. руб.** Таким образом, держа деньги на валютном счете, вкладчик относительно рублевого вклада потерял **424 руб.**

Задача 7.14

Минимальная потребительская корзина в США стоит 500 долл. Сколько эквивалентная корзина стоит в России, если номинальный обменный курс равен 34 руб./$, а реальный обменный курс, показывающий, во сколько раз цены в рассматриваемой стране меньше, чем в США, равен 2?

Решение:

Реальный обменный курс показывает, что цены в России в 2 раза меньше, чем в США. То есть эквивалентная потребительская корзина стоит в России 500/2=250 долл. или 250·34 = **8 500 руб.**

Задача 7.15

Минимальная потребительская корзина в Испании стоит 300 евро. Сколько стоит эквивалентная корзина в России, если номинальный обменный курс равен 46 руб./евро, а реальный обменный курс (величина, показывающая, во сколько раз цены в рассматриваемой стране меньше, чем в США) для Испании равен 1,5, а для России равен 1,8?

Решение:
Эквивалентная потребительская корзина в США будет стоить $300 \cdot 1{,}5 = 450$ евро, а в России $450/1{,}8 = 250$ евро. Переведем сумму по курсу в рубли и получим $250 \cdot 46 =$ **11 500 руб.**

Задача 7.16

Акции некоторой фирмы в понедельник, среду и пятницу росли на 10 %, а во вторник и четверг падали на 10 %. В какой момент недели их курс был максимальным?

Решение:
К вечеру в понедельник курс акций вырос на 10 % и достиг своего максимума. Далее дважды акции сначала падали на 10 %, а потом росли на 10%, итогом чего было их двукратное падение на 1 % ($0{,}9 \cdot 1{,}1 = 0{,}99$).

Задача 7.17

Игрок на фондовом рынке играет на акциях трех компаний, курсы которых были следующими (по указанным курсам в данные дни он может как купить, так и продать акции):

	1 сентября	**1 октября**	**1 ноября**	**1 декабря**
«Ойл-Эве»	10	14	12	16
«Айн-Нене»	120	150	140	182
«Дельта-кредит»	2000	3000	2400	3000

Какую максимальную сумму и с помощью какой стратегии мог заработать игрок, если первоначально он обладал капиталом в размере 120 тыс. руб.?

Решение:
Игроку на фондовом рынке для получения максимальной прибыли необходимо покупать акции компаний, которые дорожают за соответствующий месяц сильнее всего. Подсчитаем, как изменялся курс каждой из акций за каждый месяц:

	1 сент.–1 окт.	**1 окт.–1 нояб.**	**1 нояб.–1 дек.**
«Ойл-Эве»	14/10 = 1,4	12/14 ≈ 0,86	**16/12 ≈ 1,33**
«Айн-Нене»	150/120 = 1,25	140/150 ≈ 0,93	182/140 = 1,3
«Дельта-кредит»	**3000/2000 = 1,5**	2400/3000 = 0,8	3000/2400 = 1,25

Видим, что в первый месяц сильнее всего (в 1,5 раза) подорожали акции компании «Дельта-кредит». Купив на 120 тыс. руб. 60 таких акций, можно было увеличить состояние до 180 тыс. руб. Во второй месяц акции всех фирм понизились в цене. Соответственно, идеальным вариантом было не покупать акций, сохранив средства. На третий месяц сильнее всего дорожали акции компании «Ойл-Эве». Можно было купить на 180 тыс. руб. 15 тыс. акций по 12 руб., а 1 декабря, продав их по 16 руб., заработать 240 тыс. руб. Таким образом, за 3 месяца можно было **удвоить свое состояние – со 120 до 240 тыс. руб.**

Задача 7.18

Инвестор рассматривает инвестиционный проект, который обещает принести 210 млн руб. через 2 года. Какую сумму готов он вложить сегодня в этот проект, если по прогнозу инфляция в следующем году составит 25 %, а через год 20 %, при этом существует пятипроцентная вероятность невозврата средств? Считать инвестора нейтральным по отношению к риску.

Решение:

Через 2 года инвестор с вероятностью 95% получит 210 млн руб., а с вероятностью 5 % не получит ничего. Это означает, что в среднем сумма, которую он получит, составит 0,95·210 = 199,5 млн руб. За 2 года деньги обесценятся в 1,25·1,2 = 1,5 раза. Следовательно, полученные через 2 года 199,5 млн руб. соответствуют сегодняшним 199,5/1,5 = **133 млн руб.** Именно эту сумму нейтральный по отношению к риску инвестор готов вложить в проект.

Задача 7.19

В таблице приведены чистые прибыли/убытки (в млн руб.) за каждый год для трех инвестиционных проектов, рассчитанных на 4 года:

	1-й год	**2-й год**	**3-й год**	**4-й год**
Проект 1	–180	–108	72	432
Проект 2	–330	90	180	216
Проект 3	–100	–120	360	0

Проранжировать проекты по эффективности при дисконте $d = 20\%$. Есть ли среди них убыточные?

Решение:

Приведем чистые прибыли/убытки каждого года к деньгам первого года. Для этого суммы второго года разделим на 1,2, суммы третьего года – на $1{,}2^2$=1,44, а суммы последнего года – на $1{,}2^3$=1,728.

	1-й год	**2-й год**	**3-й год**	**4-й год**
Проект 1	–180	–90	50	250
Проект 2	–330	75	125	125
Проект 3	–100	–100	250	0

После этого, просуммировав приведенные прибыли/убытки за 4 года, получим чистую текущую стоимость каждого проекта.

$$NPV_1 = -180 - 90 + 50 + 250 = 30;$$

$$NPV_2 = -330 + 75 + 125 + 125 = -5;$$

$$NPV_3 = -100 - 100 + 250 = 50.$$

Таким образом, при дисконте $d = 20\%$ **наиболее эффективным оказывается проект 3**, **проект 1 немного хуже**, а **проект 2 – с учетом дисконта убыточен**, поскольку приносит прибыль меньше, чем необходимые для рассматриваемого инвестора 20 % годовых.

Задача 7.20

Проранжировать по внутренней норме доходности 3 инвестиционных проекта различной длительности (она указана в скобках), требующих стартовых капиталовложений в размере 10 млн руб. В таблице приведены чистые прибыли (в млн руб.):

	через 1 год	**через 2 года**	**через 3 года**
Проект 1 (1 год)	12,5	–	–
Проект 2 (2 года)	2,3	10,58	–
Проект 3 (3 года)	0	0	17,28

Решение:

Внутренняя норма доходности находится как ставка, обращающая в ноль чистую текущую стоимость проекта. Найдем d_1 для первого проекта:

$$-10 + 12{,}5/(1 + d_1) = 0, \quad 1 + d_1 = 12{,}5/10 = 1{,}25, \quad d_1 = 0{,}25 = 25\%.$$

Для третьего проекта соотношение будет иметь вид

$$-10 + 17{,}28/(1 + d_3)^3 = 0, \quad 1 + d_3 = \sqrt[3]{17{,}28/10} = \sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2, \quad d_3 = 0{,}2 = 20\%.$$

Для нахождения внутренней нормы доходности d_2 второго проекта нужно решить квадратное уравнение

$$-10 + 2{,}3/(1 + d_2) + 10{,}58/(1 + d_2)^2 = 0, \quad d_2 = 0{,}15 = 15\%.$$

Таким образом, **самым эффективным является первый проект, далее идет третий и на последнем месте – второй**.

Задача 7.21*

Рассматриваются 3 инвестиционных проекта, требующие вложений в размере 10 млн руб. Ожидается, что первый из них в дальнейшем ежегодно будет приносить по 1,2 млн руб. Второй – из-за цикличности конъюнктуры спроса – будет приносит по нечетным годам (через год, 3, 5 лет и т.д.) по 0,93 млн руб., а по четным годам – по 1,5 млн руб. Третий – наоборот по нечетным годам приносит по 1,38 млн руб., а по четным – всего по 1 млн. Проранжировать проекты по инвестиционной привлекательности и указать, выгодна ли их реализация, если дисконтирующий множитель равен 0,9 (рубль, полученный через год, эквивалентен 90 сегодняшним копейкам). Что произойдет, если из-за увеличения неопределенности в период экономического кризиса дисконтирующий множитель сократится?

Решение:

Рассчитаем чистую текущую стоимость каждого проекта:

$$NPV_1 = -10 + 1{,}2 \cdot 0{,}9 + 1{,}2 \cdot 0{,}9^2 + \ldots = -10 + 1{,}2 \cdot 0{,}9/(1 - 0{,}9) = 0{,}8.$$

$$NPV_2 = -10 + \left(0{,}93 \cdot 0{,}9 + 1{,}5 \cdot 0{,}9^2\right) + \ldots = -10 + \left(0{,}93 \cdot 0{,}9 + 1{,}5 \cdot 0{,}9^2\right)/\left(1 - 0{,}9^2\right) = 0{,}8.$$

$$NPV_3 = -10 + \left(1{,}38 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}9^2\right) + \ldots = -10 + \left(1{,}38 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}9^2\right)/\left(1 - 0{,}9^2\right) = 0{,}8.$$

Поскольку все значения чистой текущей стоимости положительны и одинаковы, **все проекты одинаково привлекательны и могут быть реализованы**.

Сокращение дисконтирующего множителя означает то, что предпочтительными являются более ранние прибыли большего размера. Следовательно, **наилучшим будет третий проект, чуть хуже – первый, и самым плохим – второй.**

Задача 7.22

В таблице заданы чистые прибыли/убытки (в млн руб.) от реализации трех инвестиционных проектов, в зависимости от действий конкурента (который либо идет на сговор с нашей фирмой, либо действует в своих интересах, либо пытается удалить нашу фирму с рынка).

	Идет на сговор	**Действует в своих интересах**	**Пытается удалить с рынка**
Проект 1	8	6	4
Проект 2	15	5	–5
Проект 3	8	7	2

Определить наиболее привлекательный проект, если по оценке экспертов конкурент с вероятностью 30 % пойдет на сговор, а с вероятностью 20 % будет пытаться удалить нашу фирму с рынка.

Решение:

Поскольку заданы вероятности каждого из 3 вариантов действий конкурента (30 %, 50 % и 20 % соответственно), то можно подсчитать математическое ожидание прибыли для каждого проекта:

$$M\pi_1 = 0{,}3 \cdot 8 + 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 4 = 6{,}2;$$
$$M\pi_2 = 0{,}3 \cdot 15 + 0{,}5 \cdot 5 - 0{,}2 \cdot 5 = 6;$$
$$M\pi_3 = 0{,}3 \cdot 8 + 0{,}5 \cdot 7 + 0{,}2 \cdot 2 = 6{,}3.$$

Ответ. Наиболее привлекательным оказывается **проект 3**.

Задача 7.23*

Население Москвы составляет 10 % населения России. При этом в 2010 г. средние доходы москвичей втрое превосходили средние доходы жителей других регионов. В 2011 г. доходы россиян в среднем выросли на 10 %, при этом москвичи стали богаче в 1,4 раза. Как изменились средние доходы жителей других регионов?

Решение:

Пускай население России составляет L чел., а средние доходы в 2010 г. равнялись w в регионах и $3w$ в Москве. Тогда суммарные заработки в России в 2010 г. составили $0{,}9L \cdot w + 0{,}1L \cdot 3w = 1{,}2Lw$. После увеличения на 10 % в 2011 г. они составили $1{,}1 \cdot 1{,}2Lw = 1{,}32Lw$. При этом москвичи стали зарабатывать $0{,}1L \cdot 3w \cdot 1{,}4 = 0{,}42Lw$. Таким образом, на территории остальной России в 2011 г. суммарные доходы оказались равны $1{,}32Lw - 0{,}42Lw = 0{,}9Lw$, что составляет $0{,}9Lw/0{,}9L = w$ на чел. **Доходы жителей других регионов не изменились.**

8. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

Задача 8.1

В деревне Андреевка проживает 100 детей, а в деревне Борисовка, находящейся от Андреевки на расстоянии 5 км, – 150 детей. В каком месте между Андреевкой и Борисовкой выгодно построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое школьниками, было наименьшим?

Решение:

Пусть школа построена на расстоянии $x \in [0; 5]$ км от Андреевки. Тогда расстояние до Борисовки составит $(5-x)$ км. Суммарное расстояние, проходимое школьниками, равно $100x + 150(5-x) = 750 - 50x \to \max$. Очевидно, что это расстояние тем меньше, чем больше x. Следовательно, $x = 5$. **Школа строится в Борисовке.**

Задача 8.2

Новая волна мирового экономического кризиса может быть инициирована глубокой рецессией в одной из трех стран: США, Германии или Японии. Вероятность каждого из этих считающихся независимыми событий эксперты оценивают в 20, 18 и 25 процентов соответственно. Найти вероятность новой волны кризиса.

Решение:

Вероятность того, что в каждой из этих трех стран не будет рецессии, равна 0,8, 0,82 и 0,75 соответственно. Следовательно, вероятность того, что кризиса не будет, можно оценить как 0,8·0,82·0,75 = 0,492. Отсюда **вероятность новой волны кризиса составит** 1–0,492 = 0,508 = **50,8 %**.

Задача 8.3*

Транспортная компания планирует выпустить проездные на маршрутки и автобусы. Есть 3 равные по численности категории населения: первая на маршрутках ездит чаще, и готова за проезд на них платить до 450 руб. в месяц, а за автобус – не более 150 руб. Вторая, напротив, чаще пользуется автобусом, соответственно, готова платить за него 400 руб. против 200 за маршрутку. Третья – на автобусах не ездит в принципе (не готова платить ни рубля), а за маршруточный проездной заплатит до 550 руб. Какие цены на проездные должна установить компания для максимизации прибыли? Должна ли она выпускать единый проездной на оба вида транспорта?

Решение:

Транспортная компания может изъять у населения все деньги, которые они готовы заплатить. Для этого нужно выпустить **единый проездной стоимостью 600 руб. и маршруточный проездной стоимостью 550 руб.** Проездной на автобус либо не нужно выпускать вообще, либо он должен стоить более 400 руб. В этом случае первые две группы приобретут единый проездной (450 + 150 = 200 + 400 = 600), а третья группа – маршруточный.

Задача 8.4

Три эксперта оценивают эффективность трех инвестиционных проектов A, B и C в целых баллах от 1 до 10. Инвестор делает свой выбор на основе среднего результата. Экспертами выставлены следующие баллы:

	A	**B**	**C**
I эксперт	6	5	3
II эксперт	3	2	4
III эксперт		6	2

Третий эксперт еще не выставил оценку проекту A.

1. Может ли он вывести проект A на первое место? Каким образом?
2. Может ли он сделать проект A наихудшим? Каким образом?
3. Изменится ли что-то, если он считает наилучшим проект B и хочет остаться честным? Ответ пояснить.

Решение:

1. Средние баллы, полученные проектами B и C, составляют соответственно $(5+2+6)/3 = 13/3 \approx 4{,}3$ и $(3+4+2)/3 = 9/3 = 3$. Если третий эксперт поставит любой балл от 5 и выше (до 10 включительно), средняя оценка проекта A будет не меньше $(6+3+5)/3 = 14/3 \approx 4{,}7$, что **позволит ему занять первое место**.
2. **Сделать проект A наихудшим невозможно**. Даже поставив проекту A самую низкую возможную оценку – 1, третий эксперт выведет его на второе место со средним баллом $(6+3+1)/3 = 10/3 \approx 3{,}3$.
3. **Выводы для последней ситуации остаются прежними**. Она отличается только тем, что у третьего эксперта остается единственная возможность: поставить проекту A 5 баллов – меньше, чем проекту B, но достаточно для первого места. 4 балла позволят осуществить дележ первого места, а меньший балл оставит проект A вторым.

Задача 8.5

«АвтоВАЗ» выпустил 3 новых модели автомобиля: «Калина», «Камли» и «Лав-4», которые эксперты оценили по следующим четырем характеристикам: дизайн, комфорт, проходимость и цена.

	Дизайн (Д)	**Комфорт (К)**	**Проходимость (П)**	**Цена (Ц)**
Калина	3	3	4	5
Камли	4	5	3	4
Лав-4	5	4	5	3

1. Проранжировать автомобили, используя критерий $Д + К + П + Ц$.
2. Предложить критерий, в соответствии с которым «Калина» окажется на первом месте, «Лав-4» – на втором, а «Камли» – на третьем. Все 4 характеристики должны быть учтены в критерии с положительными весами.

Решение:

1. В соответствии с предложенным критерием Д+К+П+Ц **«Калина» набирает 3+3+4+5 = 15 баллов** и занимает 3-е место, **«Камли» – 4+5+3+4 = 16 баллов** (2-е место), а **«Лав-4» – 5+4+5+3 = 17 баллов** (1-е место).
2. Чтобы «Калина» вышла на 1-е место, важнейшим показателем должна быть цена, чтобы «Камли» оказалась на последнем месте, больший вес должен быть и у проходимости. Например, **Д+К+2П+3Ц**. «Калина»: 3+3+2·4+3·5 = 29 (1-е место), «Лав-4»: 5+4+2·5+3·3 = 28 (2-е место), «Камли»: 4+5+2·3+3·4 = 27 (3-е место).

Задача 8.6*

Казино «ИГ-Рай» предлагает следующую игру. Рулетка (красное и черное по 50 %, без зеро) вращается неограниченное число раз до первого выпадения черного. Если красное перед черным выпадает один раз, игрок получает 100 руб., если дважды – 200 руб., если n раз – $100{\cdot}2^{n-1}$ руб. Другими словами, выигрыш возрастает пропорционально степени двойки – 100, 200, 400, 800, 1600, 3200 и т.д.

1. Найти математическое ожидание выигрыша, если участие стоит 500 руб.
2. **Только для ответивших правильно на первый вопрос!** Рекомендуете ли Вы играть в эту игру? Ответ пояснить.

Решение:

С вероятностью 50 %=0,5 игрок проигрывает (Ч), с вероятностью $0{,}5^2$=0,25 выигрывает 100 руб. (КЧ), с вероятностью $0{,}5^3$=0,125 выигрывает 200 руб. (ККЧ), и т.д. Учитывая стоимость участия в игре, найдем математическое ожидание выигрыша

$$M = -500 + 0{,}25 \cdot 100 + 0{,}125 \cdot 200 + ... + 0{,}5^{n+1} \cdot 100 \cdot 2^{n-1} + ... =$$
$$= -500 + 25 + 25 + ... + 25 + ... = \infty .$$

Математическое ожидание выигрыша равняется бесконечности. Тем не менее, **рекомендовать играть в эту игру нельзя**. Поскольку 500=25·20, в зону выигрыша по математическому ожиданию игрок уходит не раньше выигрыша суммы $100 \cdot 2^{19}$ ≈ **50 млн руб. или выше** с вероятностью $0{,}5^{20+1}$ ≈ **1/2 000 000**. Таким образом, необходимо сыграть примерно 2 млн раз, веря, что у казино есть 50 млн руб. для выплаты выигрыша.

Задача 8.7*

В коттеджном поселке 5 владельцев домов планируют построить дорогу общей стоимостью 600 тыс. руб. от шоссе до своих участков, находящихся друг за другом на расстоянии 50, 100, 150, 200 и 250 м от шоссе соответственно. Распределить стоимость дороги по всем домовладельцам так, чтобы никакой их группе не было бы выгодно отделиться и построить дорогу самостоятельно. Стоимость участков дороги считать пропорциональной их длине.

Решение:

В данной ситуации оптимальным будет распределить стоимость каждого пятидесятиметрового участка дороги (стоимостью 600/5 = 120 тыс. руб.) между владельцами, которые будут им пользоваться. Соответственно, стоимость первого участка разделится между всеми пятью владельцами (по 120/5 = 24 тыс. руб. с каждого), второго – между четырьмя (по 120/4 = 30 тыс. руб.), третьего – между тремя (по 40 тыс. руб.), четвертого – между двумя (по 60 тыс. руб.), и, наконец, последний участок полностью (120 тыс. руб.) оплатит пятый владелец. Таким образом, взносы составят: $M_1 =$**24 тыс. руб.**, $M_2 = 24 + 30 =$**54 тыс. руб.**, $M_3 = 24 + 30 + 40 =$**94 тыс. руб.**, $M_4 = 24 + 30 + 40 + 60 =$**154 тыс. руб.**, $M_5 = 24 + 30 + 40 + 60 + 120 =$**274 тыс. руб.**

Задача 8.8*

В Президентских выборах 2018 г. участвуют 4 кандидата: Медведев (М), Зюганов (З), Прохоров (П) и Навальный (Н). Предпочтения избирателей следующие:

30% избирателей считает, что Медведев лучше Прохорова, который лучше Навального, который, в свою очередь, лучше Зюганова.

20%: Навальный > Прохоров > Медведев > Зюганов.

20%: Зюганов > Навальный > Прохоров > Медведев.

20%: Зюганов > Прохоров > Навальный > Медведев.

5%: Прохоров > Навальный > Медведев > Зюганов.

5%: Навальный > Зюганов > Медведев > Прохоров.

Оценить, кто победит на выборах, проводящихся по следующим системам:

1. Относительное большинство. Побеждает набравший максимальное число голосов, набрать больше 50% не обязательно.
2. Нынешняя система. Если в первом туре никто не набирает 50% голосов, проводится второй тур с участием двух наилучших кандидатов.
3. Антибольшинство. Побеждает тот, кто реже всех оказывается на последнем месте в предпочтениях избирателей.
4. Система Хэйра. В каждом туре исключается один кандидат, наиболее несимпатичный для избирателей (чаще всего оказывающийся на последнем месте).

Решение:

Для наглядности выпишем профили предпочтений. В первой строке укажем долю соответствующих избирателей, а далее в порядке убывания всех кандидатов:

30%	**20%**	**20%**	**20%**	**5%**	**5%**
М	Н	З	З	П	Н
П	П	Н	П	Н	З
Н	М	П	Н	М	М
З	З	М	М	З	П

Проведем расчеты и отыщем победителя для каждой из представленных систем голосования.

1. При использовании правила относительного большинства, **40 %** (смотрим исключительно на первую строку) проголосуют **за Зюганова**. Он и станет победителем, поскольку Медведев получит 30 % голосов, Навальный – 25%, Прохоров – 5%.
2. В случае нынешней системы в первом туре никто не набирает абсолютного большинства, и во второй тур выходят набравшие наибольшее число голосов Зюганов и Медведев. Во втором туре благодаря избирателям первого, второго и пятого столбцов победителем становится **Медведев**, набравший $30+20+5=$**55% голосов**.
3. По системе антибольшинства побеждает **Навальный**, **ни разу не оказавшийся на последнем месте** в предпочтениях избирателей.
4. В соответствии с системой Хэйра в первом туре будет исключен Зюганов, являющий наихудшим кандидатом для 55% избирателей. После этого наихудшим из трех оставшихся кандидатов для избирателей второго, третьего, четвертого и пятого столбцов ($20+20+20+5=65$% голосов) оказывается Медведев, исключаемый во втором туре. Наконец, в третьем туре, в котором соревнуются Прохоров и Навальный, побеждает **Прохоров** (первый, четвертый и пятый столбец), набравший $30+20+5=$**55% голосов**.

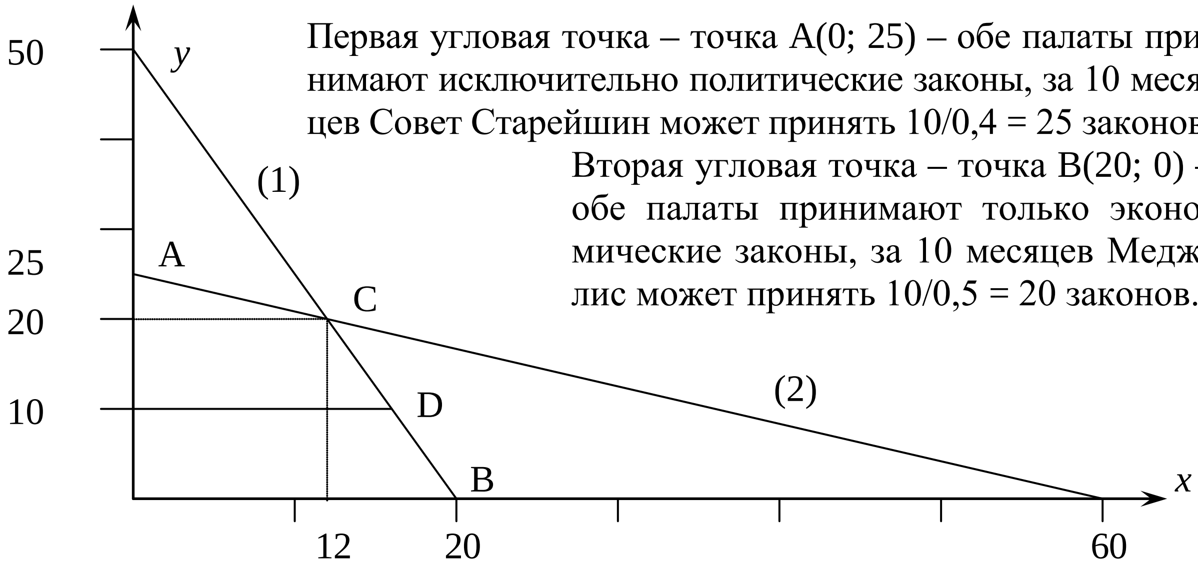
Задача 8.9*

В Ачхурабии каждый закон должен приниматься двумя палатами парламента: Меджлисом и Советом Старейшин. Меджлис тратит на обсуждение каждого экономического закона 0,5 месяца, а политического закона – 0,2 месяца. Совет Старейшин обсуждает экономический закон 1/6 месяца, а политический закон – 0,4 месяца. Сколько и каких законов должны принимать работающие по 10 месяцев в год парламентарии для максимально быстрого движения страны к светлому будущему, если каждый принятый экономический закон увеличивает благосостояние граждан на 1 %, а политический закон – на 0,5 %? Каков при этом будет экономический рост? Что изменится, если Верховный шейх Ачхурабии, утверждающий все законы, откажется подписывать более 10 политических законов в год?

Решение:

Пусть парламентарии принимают $x \geq 0$ экономических и $y \geq 0$ политических законов. Тогда Меджлис тратит на их обсуждение $(0{,}5x+0{,}2y)$ месяцев, а Совет Старейшин – $(1/6\,x+0{,}4y)$ месяцев. По условию парламентарии обеих палат работают не более 10 месяцев. Поэтому в задаче будет два ограничения:

$$0{,}5x+0{,}2y \leq 10 \ (1) \quad \text{и} \quad 1/6\,x+0{,}4y \leq 10 \ (2)$$



Первая угловая точка – точка A(0; 25) – обе палаты принимают исключительно политические законы, за 10 месяцев Совет Старейшин может принять 10/0,4 = 25 законов.

Вторая угловая точка – точка B(20; 0) – обе палаты принимают только экономические законы, за 10 месяцев Меджлис может принять 10/0,5 = 20 законов.

И третья угловая точка – точка C. Для ее нахождения нужно решить систему

$$0{,}5x + 0{,}2y = 10, \quad 1/6\,x + 0{,}4y = 10.$$

Получим координаты точки C(12; 20).

Оптимум достигается в одной из угловых точек. Вычислим экономический рост в каждой из них:

$$\pi(A) = 0{,}5 \cdot 25 = 12{,}5\%, \quad \pi(B) = 1 \cdot 20 = 20\%, \quad \pi(C) = 1 \cdot 12 + 0{,}5 \cdot 20 = 22\%.$$

Наилучший вариант – принимать **12 экономических и 20 политических законов**, что обеспечит **рост в 22 %**.

Если Верховный Шейх подписывает только 10 политических законов в год, точки A и C становятся недоступными, но появляется угловая точка D:

$$0{,}5x + 0{,}2y = 10, \quad y = 10.$$

Откуда D(16; 10), $\pi(D) = 1 \cdot 16 + 0{,}5 \cdot 10 = 21\% > 20\% = \pi(B)$.

Наилучший вариант – принимать **16 экономических и 10 политических законов**, что обеспечит **рост в 21 %**.

Задача 8.10**

В стране живет 100 млн налогоплательщиков, годовой доход которых равномерно распределен в диапазоне от нуля до 1 млн рублей. Каждый из них должен платить налог по ставке 20 %.

1. Какую сумму получит государство, если все честно платят налоги?
2. Предположим, что налогоплательщики не являются честными и, если это им выгодно, указывают в декларации нулевой доход. Пусть государство проверяет половину налогоплательщиков, и в случае обнаружения взимает штраф в размере 250 тыс. руб. Издержки проверки и получения штрафа составляют 12,5 тыс. руб. Какая доля налогоплательщиков будет честно платить налоги? Какую сумму налогов и штрафов за вычетом издержек проверки получит бюджет?
3. Какова оптимальная вероятность проверки неплательщиков с целью максимизации доходов бюджета? Сколько при этом получит бюджет?

Решение:

1. Если все платят налоги честно, то средний доход, с которого будет заплачен налог, составит 500 тыс. руб., средний налог будет равен 100 тыс. руб. а суммарный налог от 100 млн налогоплательщиков достигнет **10 трлн руб.**
2. Если налогоплательщики ведут себя стратегически, то зарабатывающим много (больше некоторой критической суммы) выгоднее с вероятностью 50 % заплатить штраф 250 тыс. руб. (в среднем 125 тыс. руб.), чем платить налог $0{,}2x$. Критическая сумма находится из неравенства

   $0{,}2x \geq 125$, $\boldsymbol{x \geq 625}$.

   Доля налогоплательщиков, зарабатывающих меньшие суммы и честно платящих налоги, равна **62,5 %** (или 62,5 млн чел.. Средний доход таких людей составит 625/2 = 312,5 тыс.руб., налог $0{,}2 \cdot 312{,}5 = 62{,}5$ тыс.руб., суммарные налоговые сборы $62{,}5 \cdot 62{,}5$ = **3 трлн 906,25 млрд руб.** Оставшиеся 37,5 млн чел. уклоняются от уплаты налогов, платят в среднем штраф 125 тыс.руб. и дают в бюджет **4 трлн 687,5 млрд руб.** Затраты на проведение проверок 50 млн чел. обходится бюджету в $50 \cdot 12{,}5 = 625$ млрд руб. Итоговые доходы государственного бюджета составят 3906,25 + 4687,5 – 625 **= 7 968,75 млрд руб.**
3. Если вероятность проверки составляет p, условие готовности платить в зависимости от зарплаты x принимает вид $0{,}2x \geq 250p$, $x \geq 1250p$ (заметим, что при вероятности проверки более 80 % все платят налоги честно). Средняя зарплата таких людей (число которых равно $125p$) составит $625p$., а налоги $125p$. Соответственно, налоговые сборы окажутся равными

   $$\boldsymbol{T = (125p)^2 = 15\,625p^2} \text{ **млрд руб.**}$$

   Штрафы будут платить $(100–125p)$ млн чел. в среднем по $250p$ тыс. руб. Общая сумма штрафов составит

   $$\boldsymbol{F = (100-125p) \cdot 250p = 25\,000p - 31\,250p^2} \text{ **млрд руб.**}$$

   Наконец, затраты на проверку составляют

   $$\boldsymbol{S = 100p \cdot 12{,}5 = 1\,250p}.$$

   Максимизируем доходы бюджета:

   $$15\,625p^2 + 25\,000p - 31\,250p^2 - 1\,250p \to \max,$$

   Приравняв производную к нулю, найдем оптимальную вероятность налоговой проверки:

   $$-31\,250p + 23\,750 = 0, \quad p^* = \mathbf{0{,}76},$$

   Найдем налоговые сборы, штрафы и расходы на проведение проверок:

   $T = 15\,625 \cdot 0{,}76^2 = \mathbf{9\,025}$,

   $F = 25\,000 \cdot 0{,}76 - 31\,250 \cdot 0{,}76^2 = \mathbf{950}$,

   $S = 1250 \cdot 0{,}76 = \mathbf{950}$.

   Таким образом, при вероятности проверки 76 % бюджет получит $9025 + 950 - 950$ = **9 трлн 025 млрд руб. дохода**.

Задача 8.11**

Покупателю известно, что цена костюмов удовлетворяющего его качества в различных магазинах равномерно распределена от 2,5 до 5 тыс. руб. Издержки поиска очередного костюма (добраться до нового места) покупатель оценивает в 50 руб. Если в очередном магазине цена не превышает некоторый критический уровень, костюм покупается, в противном случае покупатель продолжает поиски. Найти критический уровень цены, если покупатель ведет себя оптимально.

Решение:

Покупатель сделает покупку, если цена костюма в очередном магазине не будет превышать некоторой критической цены $\overline{p}$, в противном случае он продолжит поиски. Если цена строго равна $\overline{p}$, ему нет разницы, купить костюм или идти дальше. Рассмотрим данную ситуацию для нахождения $\overline{p}$.

Добраться до следующего магазина стоит 50 руб. Эти расходы покупатель несет всегда. Вероятность того, что цена костюма в следующем магазине будет ниже критической $\overline{p}$, равна

$$(\overline{p}-2500)/2500,$$

при этом она в среднем составит $(\overline{p}+2500)/2$ (здесь учитываем то, что цена распределена равномерно). В этом случае покупка костюма будет осуществлена. Вероятность обратного равна

$$1-(\overline{p}-2500)/2500=(5000-\overline{p})/2500.$$

Тогда покупатель возвращается к исходной ситуации: продолжать поиски дешевого места. Математическое ожидание издержек в этом случае составит $\overline{p}$. Получаем равенство:

$$\overline{p}=50+\frac{\overline{p}-2500}{2500}\frac{\overline{p}+2500}{2}+\frac{5000-\overline{p}}{2500}\overline{p}.$$

$$5000\overline{p}=100\cdot 2500+\overline{p}^2-2500^2+10000\overline{p}-2\overline{p}^2,$$

$$\overline{p}^2-5000\overline{p}+2500^2=10^2\cdot 50^2,\ (\overline{p}-2500)^2=500^2,\ \overline{p}=3000 \text{ руб.}$$

Ответ. При цене **меньше 3 000 руб.** костюм покупается, иначе поиски продолжаются.

Задача 8.12**

Цена выбранной модели автомобиля равномерно распределена в диапазоне от 360 до 400 тыс. руб. Изучение очередного автомобиля на предмет приобретения и торговлю с продавцом покупатель оценивает в 400 руб. Стратегия покупателя следующая: он определяет, сколько автомобилей стоит посмотреть, смотрит их и покупает самый дешевый из вариантов. Определить оптимальное количество просмотренных автомобилей и оценку стоимости купленного варианта.

Решение:

Вероятность того, что случайно выбранный автомобиль будет стоить больше $p \in [360;\, 400]$, составляет $(400-p)/(400-360) = (400-p)/40 = 10 - p/40$. Вероятность того, что все *n* случайно выбранных автомобилей будут стоить дороже *p*, равна $(10 - p/40)^n$. Соответственно, $F(p) = 1 - (10 - p/40)^n$ – вероятность того, что хотя бы один из *n* автомобилей будет дешевле *p*.

Математическое ожидание цены купленного автомобиля в зависимости от числа раундов поиска *n* равно

$$Mp(n) = \int_{p=360}^{400} pf(p)dp = \int_{p=360}^{400} pdF(p) = pF(p)\Big|_{p=360}^{400} - \int_{p=360}^{400} F(p)dp =$$

$$= p\left(1 - \left(10 - \frac{p}{40}\right)^n\right)\Bigg|_{p=360}^{400} - \int_{p=360}^{400}\left(1 - \left(10 - \frac{p}{40}\right)^n\right)dp =$$

$$= \left(p - p\left(10 - \frac{p}{40}\right)^n - p\right)\Bigg|_{p=360}^{400} + 40\int_{p=360}^{400}\left(10 - \frac{p}{40}\right)^n d\left(\frac{p}{40}\right) =$$

$$= \left(-p\left(10 - \frac{p}{40}\right)^n - 40\left(10 - \frac{p}{40}\right)^{n+1}\Big/(n+1)\right)\Bigg|_{p=360}^{400} = 360 + 40/(n+1).$$

Издержки складываются из цены автомобиля и издержек поиска, равных $0{,}4n$. Найдем, при каком значении *n* они будут минимальны:

$$360 + 40/(n+1) + 0{,}4n \to \min_n, \quad -40/(n+1)^2 + 0{,}4 = 0, \quad n = \sqrt{40/0{,}4} - 1 = 9.$$

Таким образом, покупателю необходимо посмотреть **9 автомобилей**, затратив на это 400·9 = **3 600 руб.** В результате осмотра удастся найти автомобиль с ожидаемой ценой *p* = 360 + 40/10 = **364 тыс. руб.**

Задача 8.13*

Из Ангарска в Иркутск ежедневно ездит 10 тыс. чел. Есть возможность добраться на электричке за 80 мин или на личном автомобиле. При большом числе автомобилей на дороге возникают пробки, и время движения увеличивается. Зависимость времени от числа автомобилей *x* оценивается функцией $t = 40 + x/200$.

1. Если все жители выбирают вид транспорта исходя из минимизации времени на поездку, сколько чел. будет ездить на электричке и сколько на автомобиле?
2. Сколько людей должно ездить на электричке и на автомобиле с точки зрения максимизации общественного благосостояния (минимизации суммарного времени дороги)?
3. Каковы суммарные временные потери всех жителей из-за того, что они ведут себя с точки зрения индивидуальной рациональности, а не общественной эффективности?

Решение:

1. Количество автомобилей будет увеличиваться до тех пор, пока время поездки на автомобиле для их владельцев не сравняется со временем движения электрички, т.е. с 80 мин. Решим уравнение:

   $40 + x/200 = 80$, $x/200 = 40$, $x =$ **8 000 автомобилистов**.

2. С точки зрения общественного благосостояния необходимо минимизировать суммарное время дороги. Пусть x жителей поедут на автомобиле, тогда оставшимся (10 000–x) жителям потребуется пользоваться электричкой. Суммарное время дороги составит

   $$T = (40 + x/200)x + 80\,(10\,000 - x) = x^2/200 - 40x + 800\,000 \to \min.$$

   Приравняв производную к нулю, найдем точку минимума:

   $x/100 - 40 = 0$, $x =$ **4 000 автомобилистов**.

   Заметим, что число автомобилистов должно быть сокращено вдвое относительно равновесного значения.

3. Суммарное время в пути в равновесии составляет 10 тыс.·80 = 800 тыс. мин (все добираются за 80 мин). В общественном оптимуме 4 тыс. автомобилистов добирались бы за $40 + 4\,000/200$ = 60 мин, т.е. экономили бы по 20 мин каждый. Суммарные потери составляют 4 тыс.·20 = **80 тыс. мин**.

Задача 8.14

Сапожник отправляет своего подмастерья продать пару сапог за 25 руб. Подмастерье находит двух одноногих мужиков, продает каждому по сапогу за 12,5 руб. и приносит 25 руб. хозяину. Узнав про это, хозяин посылает подмастерья вернуть инвалидам 5 руб. (по 2,5 руб. каждому). Подмастерье возвращает каждому по рублю, решает, что те и так довольны, и пропивает оставшуюся трешницу.

Осуществляем подсчет. Мужики заплатили за сапоги по (12,5 – 1) = 11,5 руб. В сумме это составит 11,5·2 = 23 руб. Плюс трешницу пропил подмастерье. Итого: 23 + 3 = 26 руб. А сапоги стоили 25 руб. Откуда взялся рубль?

Решение:

Задача на верный подсчет доходов и расходов. Доходы сапожника – это 23 руб., заплаченные купившими сапоги мужиками. Расходы – трешница, пропитая подмастерьем. 23 – 3 = 20 руб. – сумма, которую получил сапожник (25 руб. за вычетом выданной подмастерью пятерки).